総合図書館ＬＳセミナー　授業サポートシリーズ

力学のための微分方程式

総合図書館ＬＳ　愛甲将司（理学研究科）

- このセミナーの目的

微分方程式に対するニガテ意識を無くしてもらうこと。

線形/非線形

特殊解/一般解

斉次/非斉次

微分方程式
の解き方

サッパリワカラン

↓

なんとなく分かる

・微分方程式を解くということ

ドラゴンク〇スト的たとえ

『微分方程式を解きます！』＝『モンスターを倒します！』

モンスターはスライムなのか竜王なのか?

教科書で見かける

『常微分』,『線形/非線形』,『斉次/非斉次』…

などの用語は、闘う相手がスライムなのかキメラなのか、はたまた竜王なのかを最初に言っているだけ。

- 微分方程式の観点から見ると、初等力学は『はじめの町』から『次の町（か、その次の町）』までしか冒険しません。

強すぎる敵とは遭遇しないので、『基本』を押さえて、スライムを倒しながら経験値を上げれば、クリア（単位を取得）できます。

- 敵の種類はそう多くはありません。

教科書を読むと、微分方程式の解法は場当たり的で、いくつもの解き方を学ばなければいけないような印象を受けるかもしれません。

しかし、初等力学で出会う微分方程式に全般に使える攻略法があります。今日のセミナーではその攻略法を学びます。

・以下のことを心に留めて置いてください。

『教科書を読む、セミナーを聞く』ことは『攻略本を読むこと』に相当します。

試験中は攻略本の使用は禁止です。（残念ながら、ここはゲームとは違います。）

自分の力で解けるようになるために、教科書の例題などを解いてレベルを上げる必要があります。

- では、今日のセミナーで対象とする微分方程式をざっと眺めてみましょう。

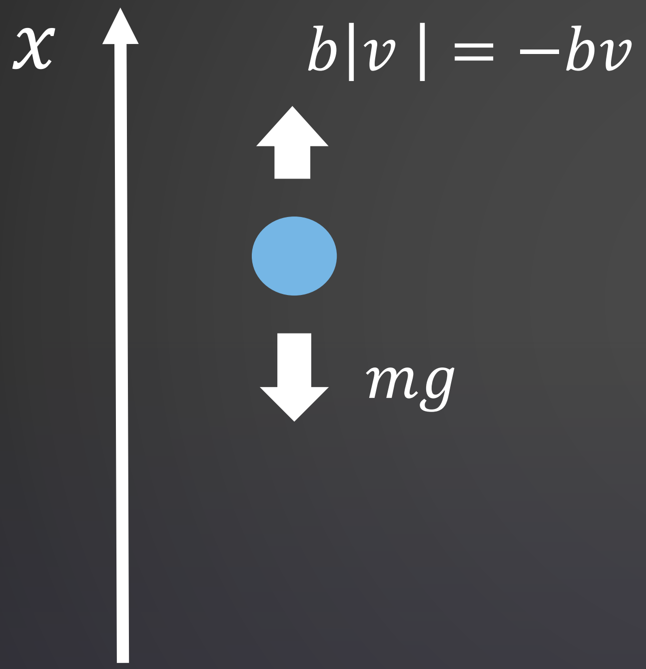
今日出会う微分方程式たち

その1. 重力の下での落下運動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

今日出会う微分方程式たち

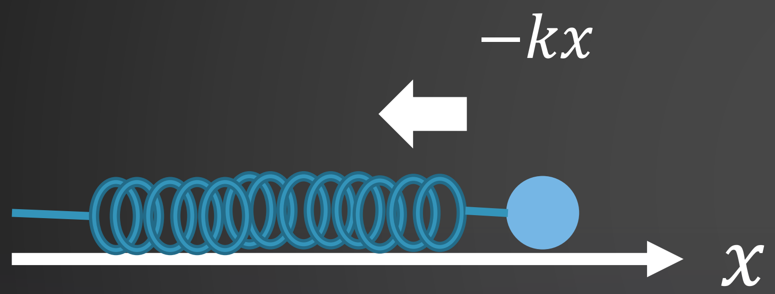
その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - b\frac{dx}{dt}$$

今日出会う微分方程式たち

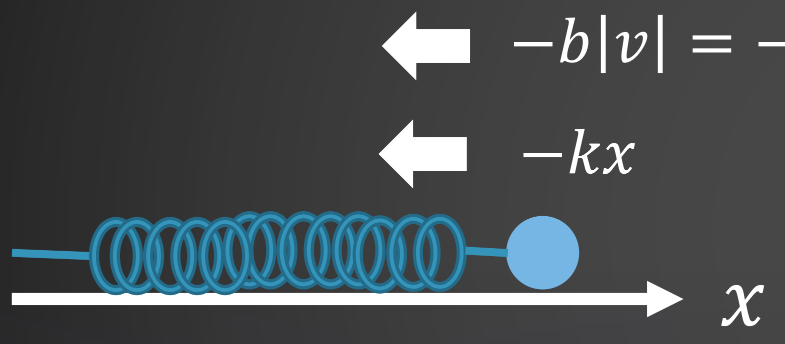
その3. ばねの振動



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

今日出会う微分方程式たち

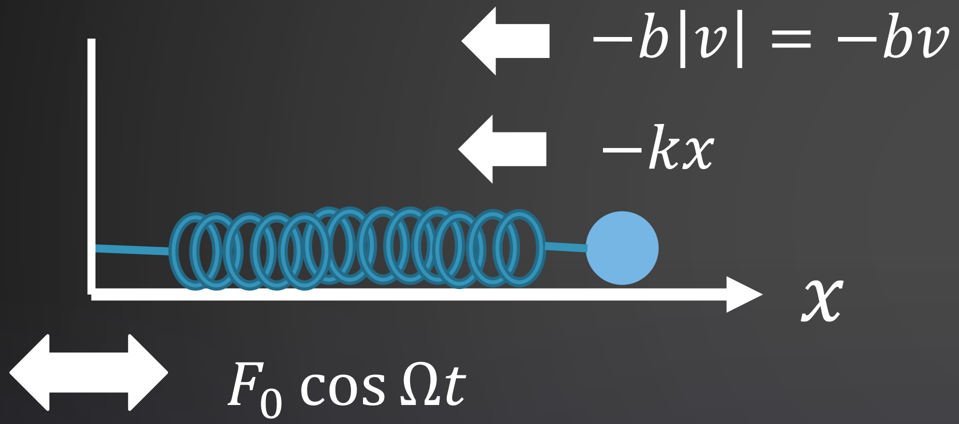
その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

今日出会う微分方程式たち

その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力（時間があれば）



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t$$

- なにも見ずにこれらの微分方程式が解けるようになれば、微分方程式の基礎はマスターしたと言えると思います。

微分方程式の分類

先ほどの物理的な観点での分類法

その1. 重力の下での落下運動

その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗

などなど

は、微分方程式を解く上では役に立ちません。

微分方程式の分類

攻略法の分かる分類

〇〇という種類に含まれる微分方程式で、□□の解法で解くことができる。

が微分方程式を攻略するには役に立ちます。

いまから、上の動機の下で分類していきます。一見すると難しそうですが、見かけ倒しなので気軽に聞いてください。

微分方程式の分類

Step 0. 常微分か偏微分か？

常微分 $$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}, \cdots$$

偏微分 $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}, \cdots$$

偏微分が関係しない微分方程式を、『常微分方程式』と言います。

一変数関数の偏微分は常微分なので、常微分方程式は偏微分方程式の一種とも言えます。ニュートン方程式が常微分方程式なので、力学では常微分方程式を解くことがほとんどです。(その意味でstep 0.です。)

Level 1：自由落下

Step 1. 線形か非線形か?

線形：微分項同士の掛け算を含まない。（微分項の１次式）

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}, \cdots$$ ：線形な項、 $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}, \cdots$$ ：非線形な項

非線形微分方程式は解くことが難しいことが多く、解の振る舞いが混沌としていることからカオス理論と呼ばれたりします。現在も研究されているので、魔王クラスの問題と言えます。初等力学で見ることはまず無いです。

微分方程式の分類

Step 2. 斉次か非斉次か?

斉次：
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

非斉次：
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

聞きなれない言葉ですが、xに関係ない項があるか、ないかを区別しているだけです。

係数$a_m (m = 0,1,\cdots,n)$は一般にはtの関数ですが、力学で出会うのは定数係数が多いです。係数がtの関数だと難易度が上がります。

微分方程式の分類

Option. 微分方程式の階数は?

項の階数：微分されている回数

$$\frac{dx}{dt} \text{：1階、} \frac{d^2x}{dt^2} \text{：2階、} \cdots, \frac{d^nx}{dt^n} \text{：}n\text{階}$$

『微分方程式の』**階数**：含んでいる項の中で一番大きい階数

例えば、

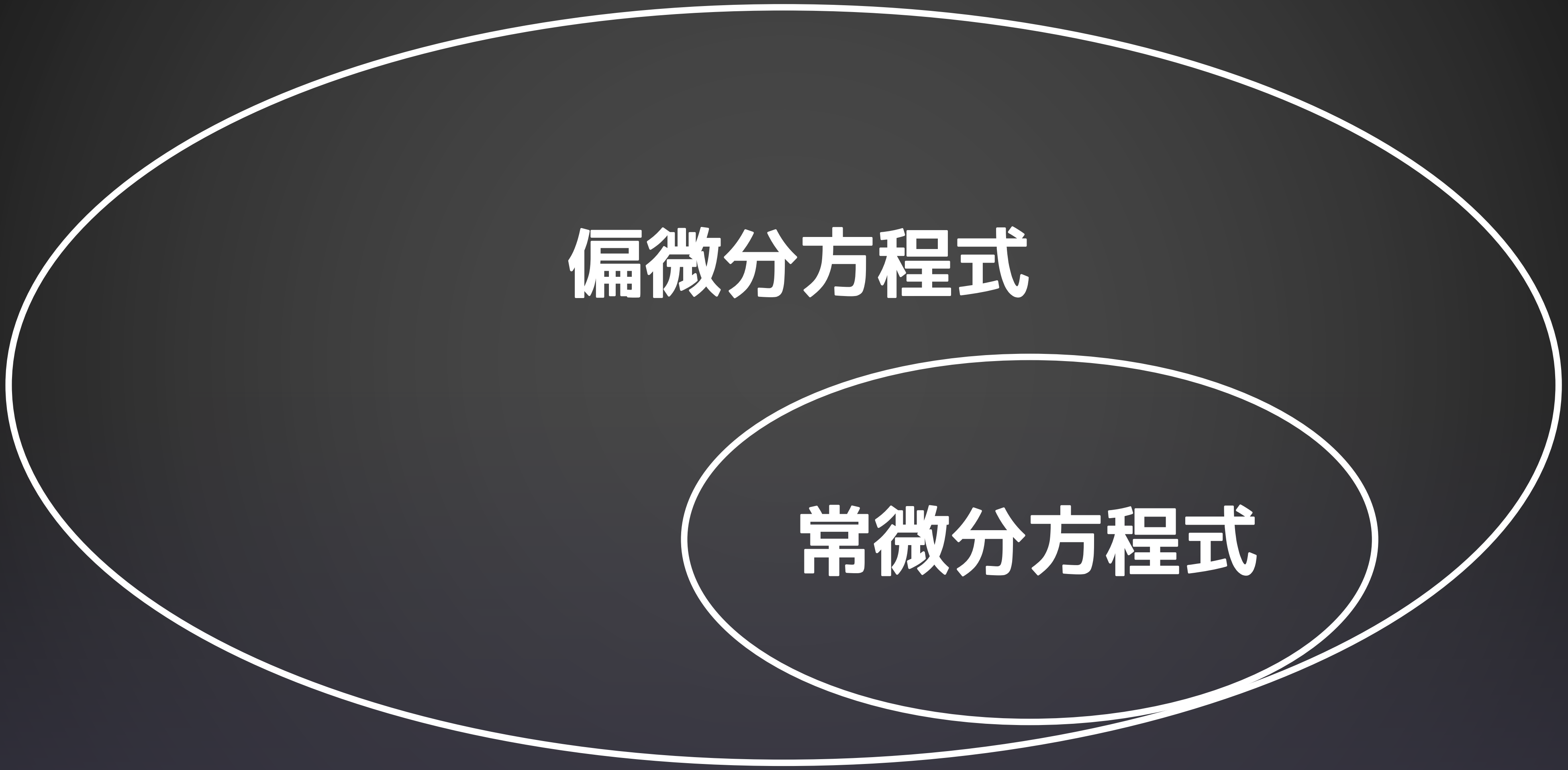
$$a_n \frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0$$

は n 階の微分方程式です。ニュートン方程式が2階の微分方程式なので、
力学では3階以上の微分方程式はほぼ出てきません。

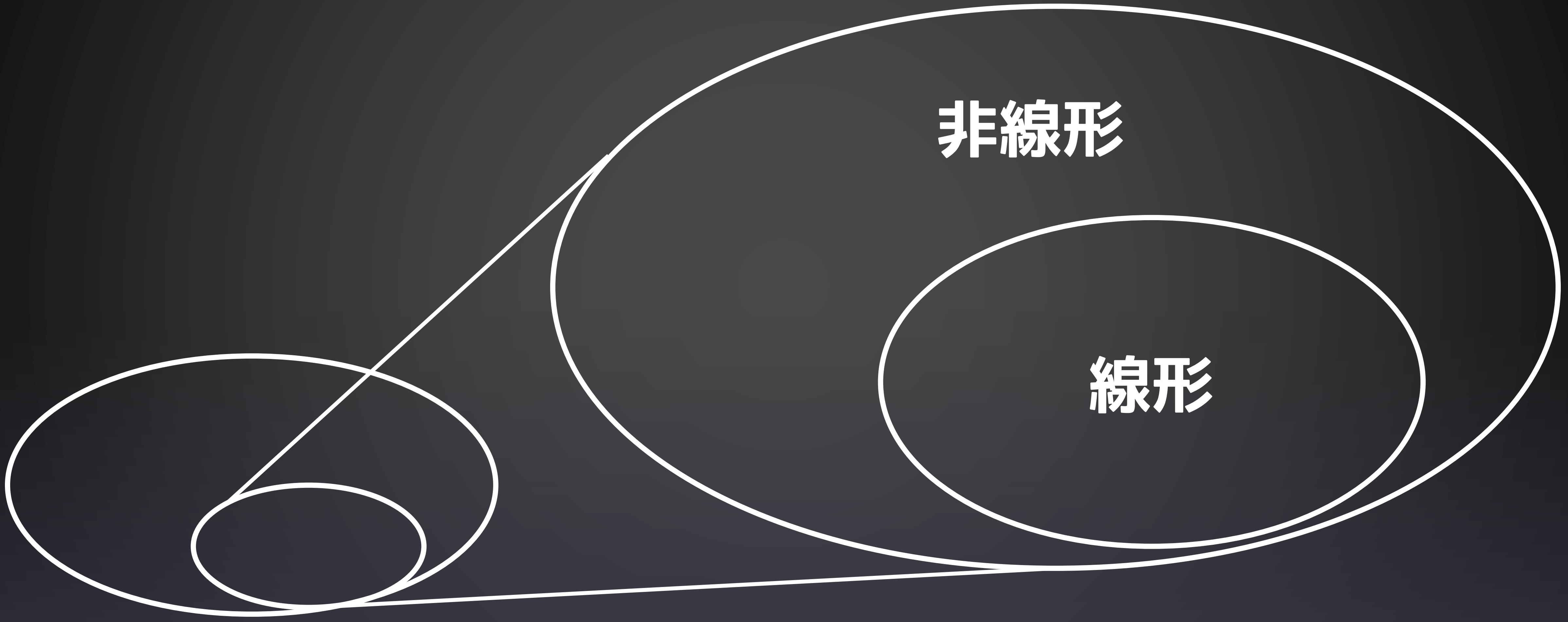
微分方程式の分類（まとめ）

微分方程式の全体

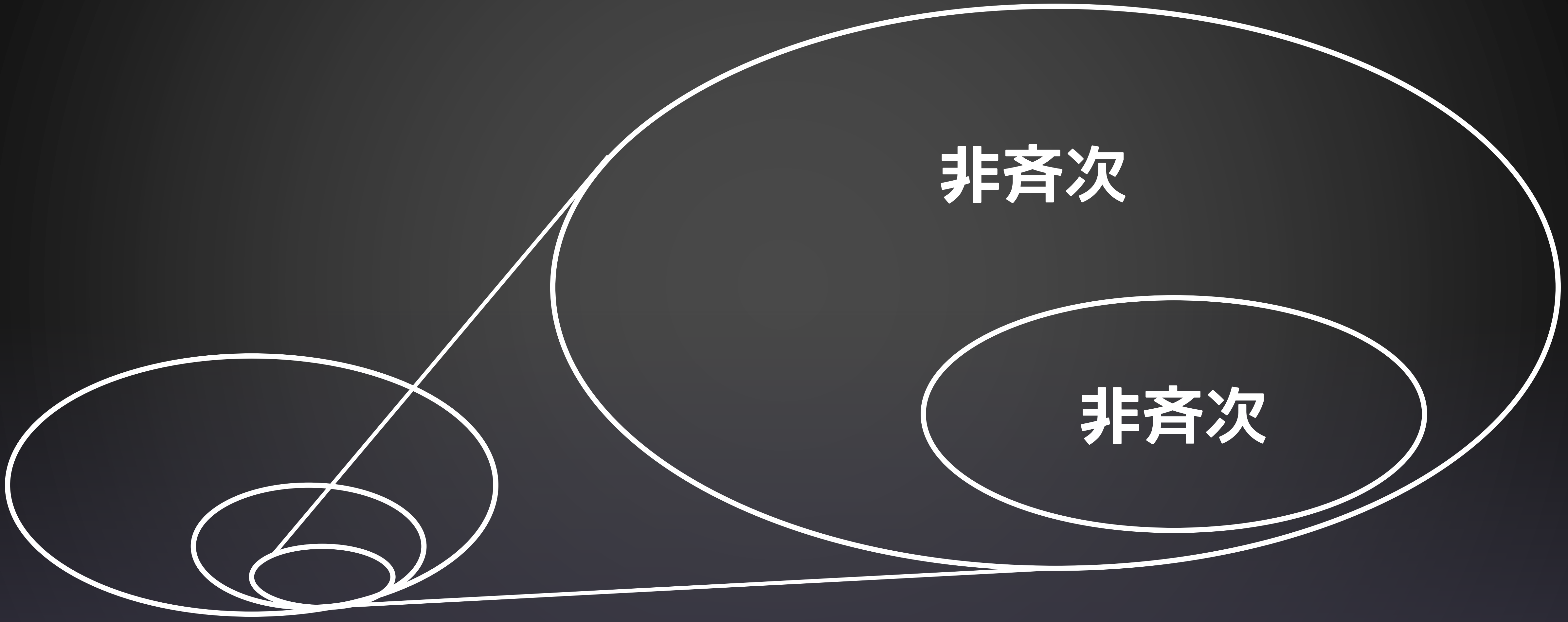
微分方程式の分類（まとめ）



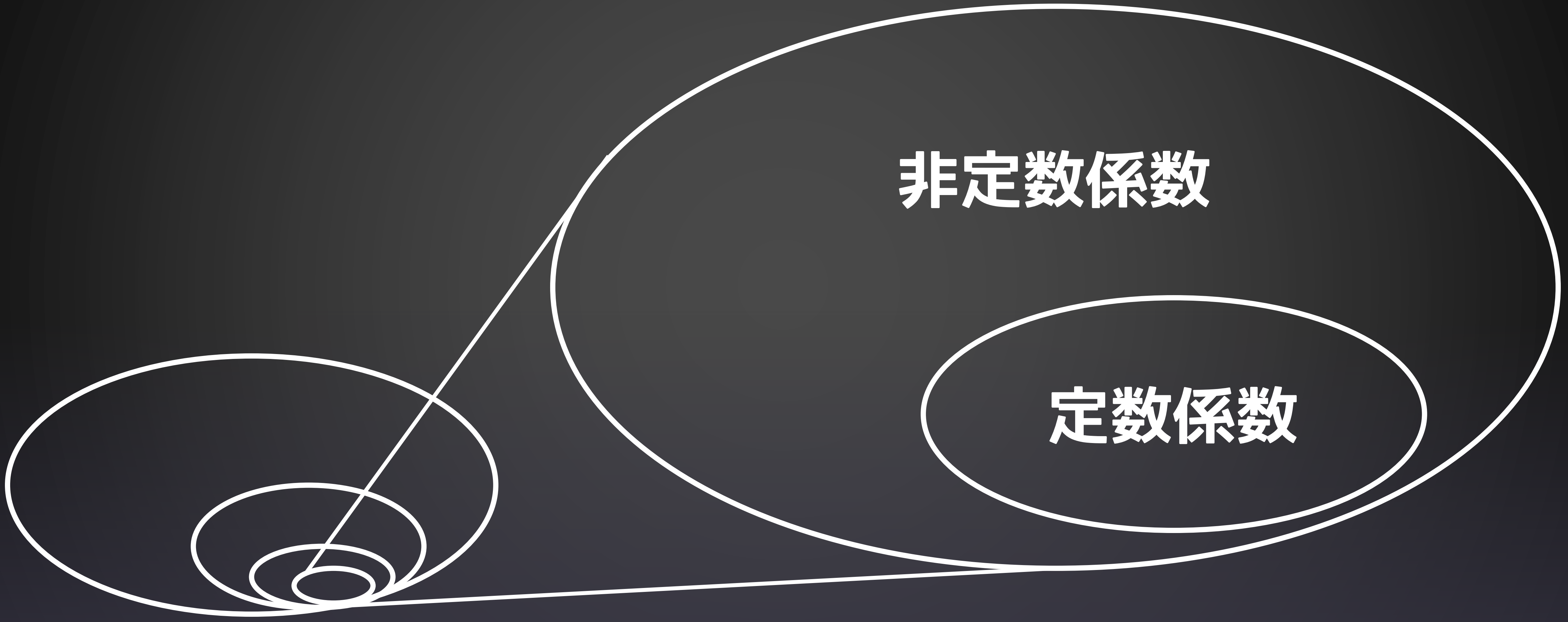
微分方程式の分類（まとめ）



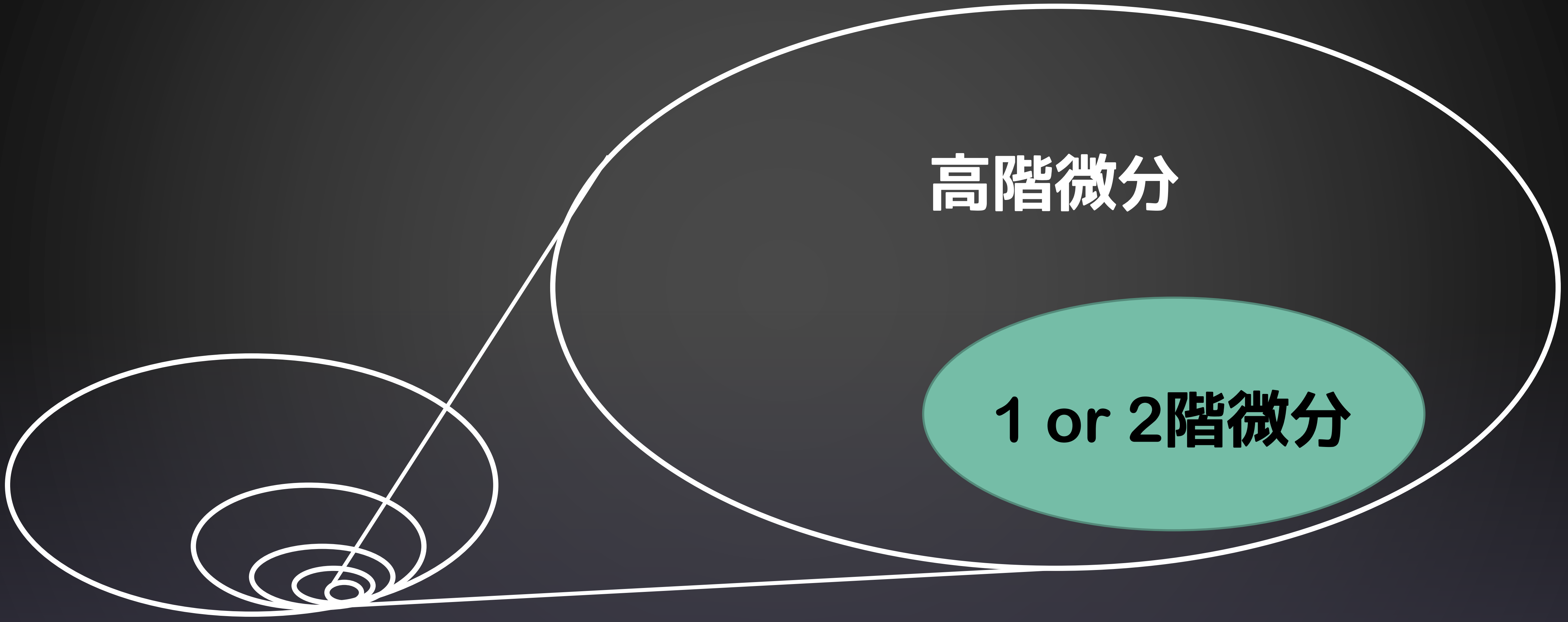
微分方程式の分類（まとめ）



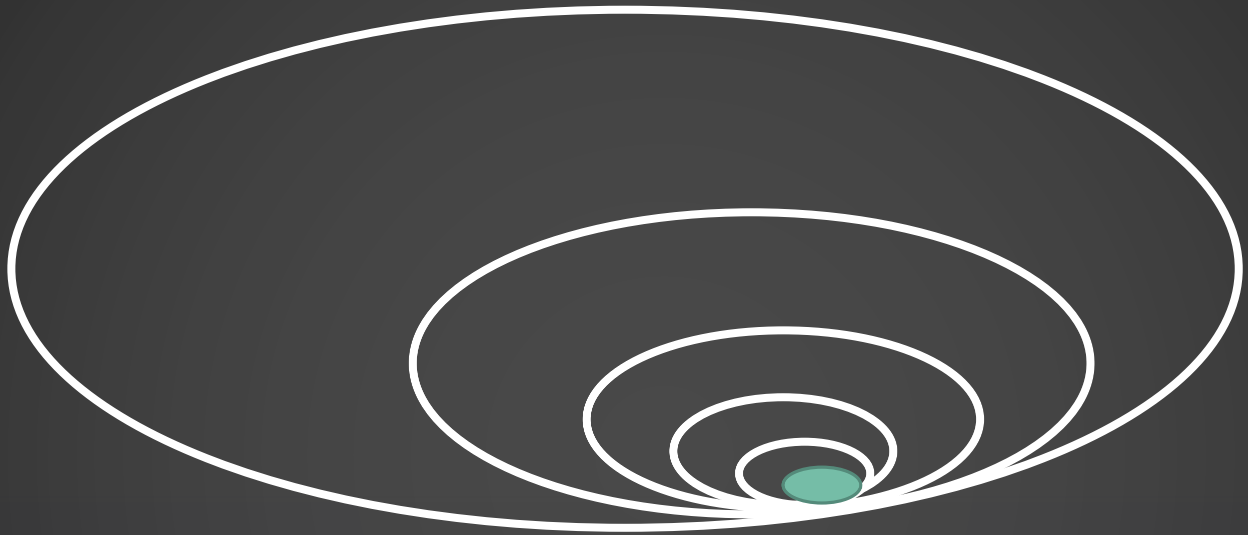
微分方程式の分類（まとめ）



微分方程式の分類（まとめ）



微分方程式の分類（まとめ）



微分方程式と一口で言っても、そこには果てしない広がりがあります。力学が取り扱うのは、そのごく一部に過ぎません。しかし、そこにもまた広がり（しかも広大な）があるので、理解するためには努力が必要です。

今日出会う微分方程式たちの分類

その1. 重力の下での落下運動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

常微分で線形な非斉次の定数係数を持った２階の微分方程式

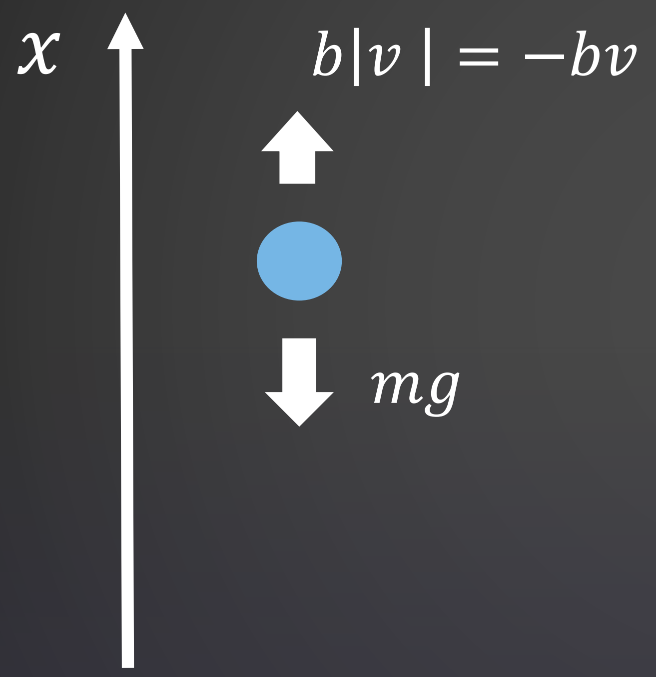
ではあんまりなので

２階の線形非斉次定数係数常微分方程式

などと呼びます。名前の付け方は人に依ります。

今日出会う微分方程式たちの分類

その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = -mg$$

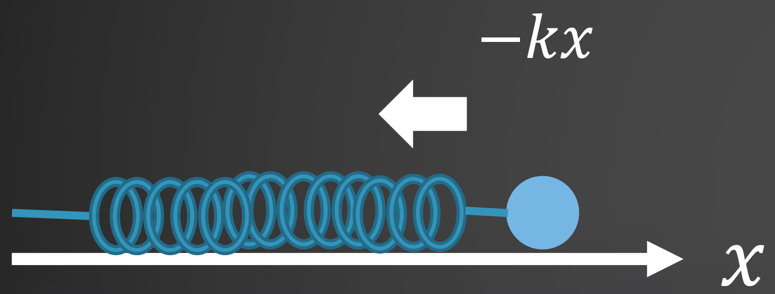
常微分/線形/定数係数/２階は以後共通なので省略します。

非斉次の微分方程式

<u>２階の線形非斉次定数係数常微分方程式</u>

今日出会う微分方程式たちの分類

その3. ばねの振動



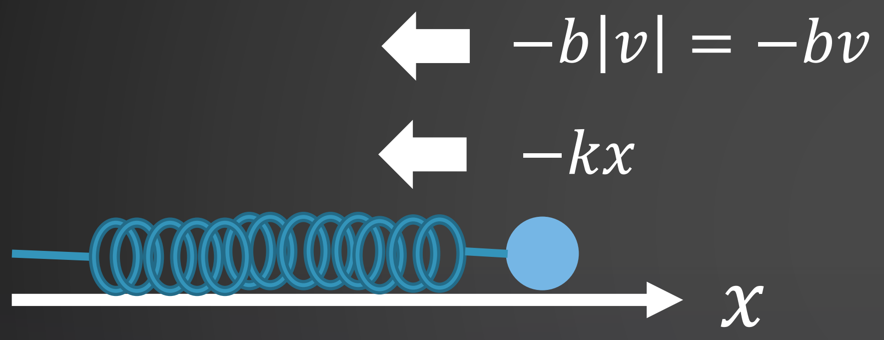
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

斉次の微分方程式

2階の線形斉次定数係数常微分方程式

今日出会う微分方程式たちの分類

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗



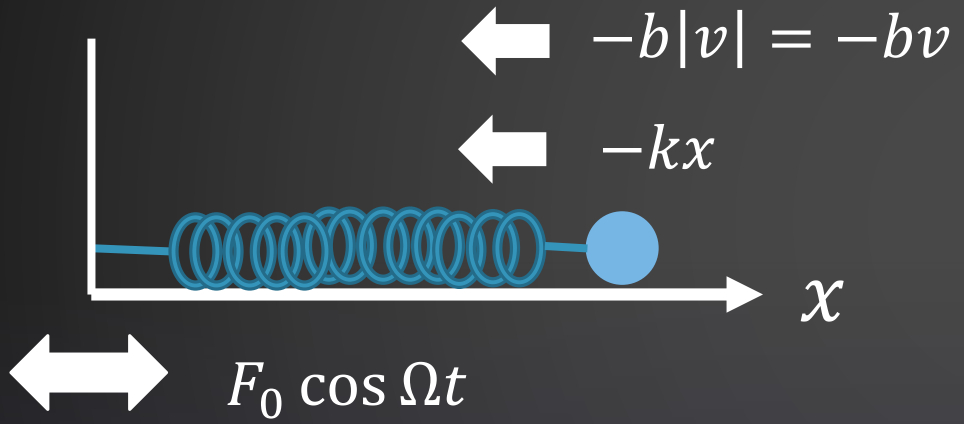
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

斉次の微分方程式

<u>２階の線形斉次定数係数常微分方程式</u>

今日出会う微分方程式たちの分類

その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力（時間があれば）



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

非斉次の微分方程式

<u>２階の線形非斉次定数係数常微分方程式</u>

今日出会う微分方程式たちの分類

結局のところ、斉次か非斉次で分類ができました。

斉次組

その3. ばねの振動
その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗

非斉次組

その1. 重力の下での落下運動
その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗
その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力

分類が終わったので、攻略法を見ていきましょう。

微分方程式の攻略法

非斉次方程式は一つの特別な解が見つかると、斉次方程式にすることができます。

非斉次方程式を満たす解をx_0と呼ぶことにします。つまり、

$$a_n \frac{d^n x_0}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_0}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx_0}{dt} + a_0 x_0 = f(t)$$

このような解x_0を特殊解と呼びます。ここで、新しい解xを、

$$x = x' + x_0$$

と置きます。この解xを一般解と呼びます。x'はまだ分かっていない関数です。

微分方程式の攻略法

一般解
$$x = x' + x_0$$

を微分方程式に代入します。

$$a_n \frac{d^n(x'+x_0)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d(x'+x_0)}{dt} + a_0(x'+x_0) = f(t)$$

x_0は、

$$a_n \frac{d^n x_0}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dx_0}{dt} + a_0 x_0 = f(t)$$

を満たしたので、x'の方程式は斉次方程式になります。

$$a_n \frac{d^n x'}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dx'}{dt} + a_0 x' = 0$$

微分方程式の攻略法

非斉次方程式は特殊解が見つかれば、斉次方程式になりました。なので問題は『斉次方程式をどう攻略するか』ということになります。

（強力な敵もお助けアイテムを使うと倒しやすくなります。とはいえ、お助けアイテムを入手するのが大変だったりするので一概に簡単になったとは言えませんが。）

斉次方程式は一般的に使える攻略法があります。なので今日出会う微分方程式は全て機械的に解くことができます。

斉次方程式の攻略法

指数関数の微分

$$\frac{d^m e^{\gamma t}}{dt^m} = \gamma^m e^{\gamma t}$$

に注意して、

$$x = Ae^{\gamma t}$$

(Aは定数)

を斉次方程式に代入します。

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

$$\left[a_n \gamma^n + \cdots + a_1 \gamma + a_0\right] Ae^{\gamma t} = 0$$

斉次方程式の攻略法

$e^{\gamma t} \neq 0$なので、

$$\left[a_n\gamma^n + \cdots + a_1\gamma + a_0\right] Ae^{\gamma t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n\gamma^n + \cdots + a_1\gamma + a_0 = 0$$

よって、n次の代数方程式を解けば解が求まります。
(ちなみに、$\gamma = -\infty$の時は$e^{\gamma t} = 0$ですが、$x = 0$なので自明な解となります。)

n次の代数方程式の解を$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$と呼ぶことにします。

斉次方程式の攻略法

Case 1. $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$が互いに等しくないとき（重根がないとき）

このときは、$x = e^{\gamma_m t}, (m = 1, \cdots n)$はそれぞれ微分方程式を満たすので、

$$x = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \cdots + C_n e^{\gamma_n t}$$

が答えです。ただし、$C_m, (m = 1, \cdots, n)$は任意の定数です。

斉次方程式の攻略法

Case 2. $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$のいくつかが等しいとき（重根があるとき）

重解のない部分$x = e^{\gamma_m t}, (m = 1, \cdots, k \leq n)$は微分方程式を満たすので、

$$x_1 = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \cdots + C_k e^{\gamma_k t}$$

は微分方程式の解です。しかし、これ以外にも解が存在します。

n次の代数方程式に戻りましょう。簡単のために、重解が一種類でj個あるとします。このとき、n次方程式を因数分解すると、

$$a_n \gamma^n + \cdots + a_1 \gamma + a_0 = a_n (\gamma - \gamma_0)^j (\gamma - \gamma_1) \cdots (\gamma - \gamma_{n-j}) = 0$$

斉次方程式の攻略法

$$a_n(\gamma-\gamma_0)^j(\gamma-\gamma_1)\cdots(\gamma-\gamma_{n-j})=0$$

は、微分を使って、

$$a_n\left(\frac{d}{dt}-\gamma_0\right)^j\left(\frac{d}{dt}-\gamma_1\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-\gamma_{n-j}\right)e^{\gamma t}=0$$

と書けます。重解の部分

$$\left(\frac{d}{dt}-\gamma_0\right)^j e^{\gamma t}=0$$

に注目して、元々の解を少し変更してみます。

$$x=Ae^{\gamma t} \quad \Rightarrow \quad x=A(t)e^{\gamma_0 t}$$

斉次方程式の攻略法

$$x = A(t)e^{\gamma_0 t}$$

を代入してみましょう。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)^j A(t)e^{\gamma_0 t} &= \left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)^{j-1} \left[\frac{dA}{dt} + A(\gamma_0 - \gamma_0)\right] e^{\gamma_0 t} \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)^{j-1} \frac{dA}{dt} e^{\gamma_0 t} = \frac{d^j A}{dt^j} e^{\gamma_0 t} = 0\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{d^j A}{dt^j} = 0$$

を満たす$A(t)$を考えます。

斉次方程式の攻略法

$$\frac{d^j A}{dt^j} = 0$$

をj回積分すると、

$$A(t) = C'_j t^{j-1} + \cdots + C'_2 t + C'_1$$

なので、

$$x_2 = A(t) e^{\gamma_0 t} = \left(C'_j t^{j-1} + \cdots + C'_2 t + C'_1 \right) e^{\gamma_0 t}$$

が解として得られます。おそらく迷子になった人もいると思うので、これが本当に解になっていることをチェックしましょう。

斉次方程式の攻略法

$$x_2 = A(t)e^{\gamma_0 t} = \left(C'_j t^{j-1} + \cdots + C'_2 t + C'_1\right) e^{\gamma_0 t}$$

元の微分方程式を因数分解したものに代入します。

$$a_n \left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)^j \left(\frac{d}{dt} - \gamma_1\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \gamma_{n-j}\right) e^{\gamma t}$$

$$= a_n \left(\frac{d}{dt} - \gamma_1\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \gamma_{n-j}\right) \left[\left(\frac{d}{dt} - \gamma_0\right)^j A(t)e^{\gamma_0 t}\right]$$

$$= a_n \left(\frac{d}{dt} - \gamma_1\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \gamma_{n-j}\right) \frac{d^j A(t)}{dt^j} e^{\gamma_0 t} = 0$$

斉次方程式の攻略法（まとめ）

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

の解を求めるにはまず、　$x = Ae^{\gamma t}$

を代入して代数方程式　$a_n \gamma^n + \cdots + a_1 \gamma + a_0 = 0$

を解きます。このとき重根のある/なしで場合分けされて、

Case 1. 重根がないときは

$$x = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \cdots + C_n e^{\gamma_n t}$$

が解です。ただし、$C_m, (m = 1, \cdots, n)$は任意の定数です。

斉次方程式の攻略法（まとめ）

Case 2. 重根があるときは

$$x = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \cdots + C_k e^{\gamma_k t}$$
$$+ (C_{k+1} t^k + \cdots + C_{n-1} t + C_n) e^{\gamma_0 t}$$

が解です。ただし、$C_m, (m = 1, \cdots, n)$は任意の定数です。

n次斉次方程式にはn個の解が存在します。また、任意変数の数もn個あります。力学では、この任意変数を**初期条件**と呼びます。

続・斉次方程式の攻略法

先ほどの議論には、実は不十分なところがあります。
それは、n次の代数方程式の解が実数だけだと仮定していたところです。
実際の問題では、

$$\gamma_{\pm} = A \pm iB$$

のような解が得られることがあります。これの取り扱いを考えましょう。

まず、元の解に$\gamma_{\pm}$を代入します。

$$x = C_1 e^{(A+iB)t} + C_2 e^{(A-iB)t} = e^{At}(C_1 e^{iBt} + C_2 e^{-iBt})$$

このとき、任意定数C_1, C_2も複素数であることに注意してください。

続・斉次方程式の攻略法

さて、微分積分の講義で指数関数の級数展開を見たことがあると思います。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

今はxが虚数ですが、同じように級数展開できるとします。

$$e^{iB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iB)^n}{n!} = \left(1 - \frac{B^2}{2!} + \frac{B^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(B - \frac{B^3}{3!} + \frac{B^5}{5!} + \cdots\right)$$

この展開が収束することなどは複素関数論で学びます。今は実数の話を単に複素数に延長したと思ってもらって大丈夫です。

続・斉次方程式の攻略法

指数関数の級数展開

$$e^{iB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iB)^n}{n!} = \left(1 - \frac{B^2}{2!} + \frac{B^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(B - \frac{B^3}{3!} + \frac{B^5}{5!} + \cdots\right)$$

をよく見ると、三角関数の展開で書けていることが分かります。

$$\cos B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} B^{2n} = 1 - \frac{B^2}{2!} + \frac{B^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = B - \frac{B^3}{3!} + \frac{B^5}{5!} + \cdots$$

続・斉次方程式の攻略法

よって、指数が虚数の時は

$$e^{iB} = \cos B + i \sin B$$

と書くことができます。これを**オイラーの公式**と呼びます。

$$x = e^{At}(C_1 e^{iBt} + C_2 e^{-iBt})$$

に戻って、展開してみましょう。

$$x = e^{At}\Big\{\left[\mathrm{Re}(C_1) + i\mathrm{Im}(C_1)\right](\cos Bt + i \sin Bt)$$
$$+ \left[\mathrm{Re}(C_2) + i\mathrm{Im}(C_2)\right](\cos Bt - i \sin Bt)\Big\}$$

続・斉次方程式の攻略法

実部と虚部に整理すると、

$$
\begin{aligned}
x = e^{At}\{[\mathrm{Re}(C_1) + \mathrm{Re}(C_2)]\cos Bt - [\mathrm{Im}(C_1) - \mathrm{Im}(C_2)]\sin Bt\} \\
+ ie^{At}\{[\mathrm{Im}(C_1) + \mathrm{Im}(C_2)]\cos Bt + [\mathrm{Re}(C_1) - \mathrm{Re}(C_2)]\sin Bt\}
\end{aligned}
$$

さて、位置xは実数なので、両辺の実部を取りましょう。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x) &= e^{At}\left\{[\mathrm{Re}(C_1) + \mathrm{Re}(C_2)]\cos Bt - [\mathrm{Im}(C_1) - \mathrm{Im}(C_2)]\sin Bt\right\} \\
&= e^{At}\left[C'_1 \cos Bt + C'_2 \sin Bt\right]
\end{aligned}
$$

代数方程式の解が虚数の時は、三角関数の和が答えとなります。

では、先ほど分類した微分方程式たちを実際に解いてみましょう。

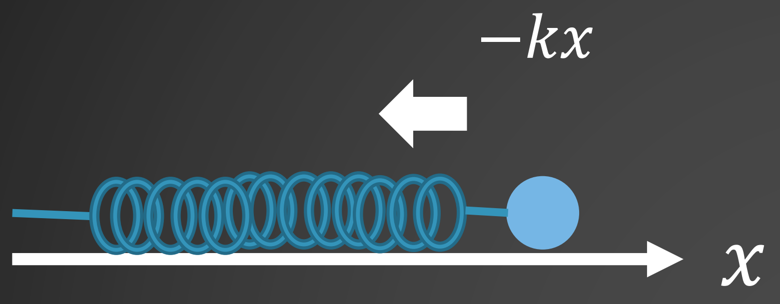
斉次組

その3. ばねの振動
その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗

非斉次組

その1. 重力の下での落下運動
その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗
その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力

その3. ばねの振動



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

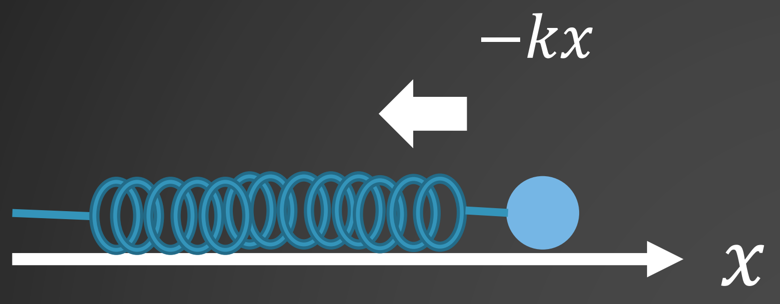
Step1. $e^{\gamma t}$**を代入します。**

$$(\gamma^2 + \omega^2)e^{\gamma t} = 0$$

Step2. 代数方程式を解きます。

$$\gamma = \pm i\omega$$

その3. ばねの振動



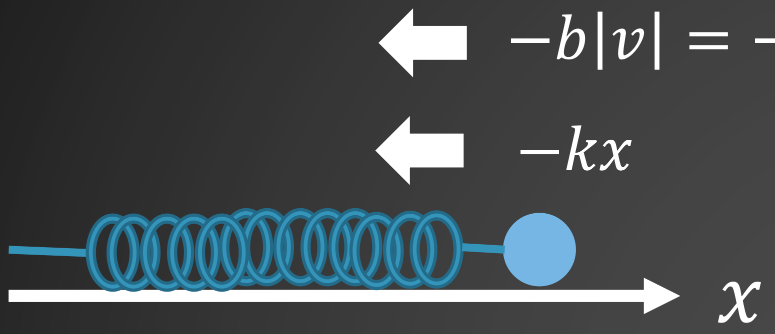
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Step3. 場合分けに応じて解を求めます。γが虚数なので、

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

教科書では、『よく見ると三角関数が解になると分かるので、それに任意定数を掛けて〜』と説明されていたりします。答えが求まればいいので、どちらが回答として優れているということはないです。

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad \left(\kappa = \frac{b}{m}\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Step1. $e^{\gamma t}$**を代入します。**

$$(\gamma^2 + \kappa\gamma + \omega^2)e^{\gamma t} = 0$$

Step2. 代数方程式を解きます。

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[-\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 4\omega^2}\right] = \frac{\kappa}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2}\right]$$

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗

Step3. 場合分けに応じて解を求めます。γの形

$$\gamma = \frac{\kappa}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2}\right]$$

から、以下の3通りがあります。

$$\mathbf{1:}\ 1 > 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2,\quad \mathbf{2:}\ 1 = 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2,\quad \mathbf{3:}\ 1 < 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2$$

1.のときは重根がなく、γが負なので、

$$x = C_1 e^{\gamma_+ t} + C_2 e^{\gamma_- t} = C_1 e^{-|\gamma_+|t} + C_2 e^{-|\gamma_-|t}$$

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗

2.のときは重根になっています。

$$\gamma_0 = -\frac{\kappa}{2}$$

重根があるときの解は、

$$x_2 = A(t)e^{\gamma_0 t} = \left(C'_j t^{j-1} + \cdots + C'_2 t + C'_1\right) e^{\gamma_0 t}$$

だったので、$j = 2$を代入して、

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\frac{\kappa t}{2}}$$

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗

3.のときは虚数解になっています。

$$\gamma = \frac{\kappa}{2}\left[-1 \pm i\sqrt{4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 - 1}\right] = -\frac{\kappa}{2} \pm iB$$

このときの解は、$\gamma = A \pm iB$について

$$x = [C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt]e^{At}$$

だったので、

$$x = [C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt]e^{-\frac{\kappa t}{2}}$$

その4. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗（まとめ）

解には3通りがありました。それぞれに名前が付けられています。

1: $1 > 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2$, **過減衰**

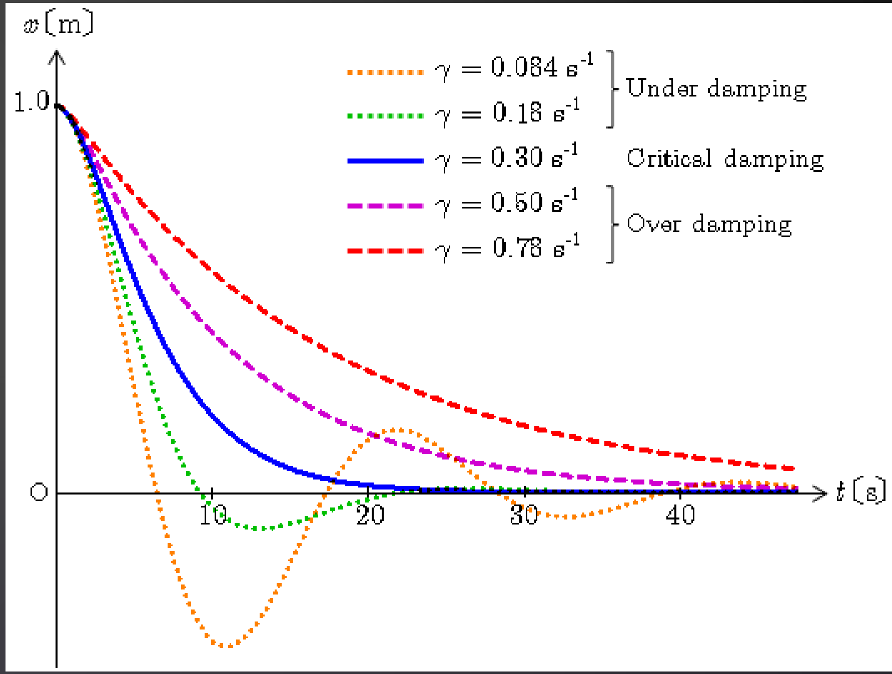
$$x = C_1 e^{-|\gamma_+|t} + C_2 e^{-|\gamma_-|t}$$

2: $1 = 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2$, **臨界減衰**

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\frac{\kappa t}{2}}$$

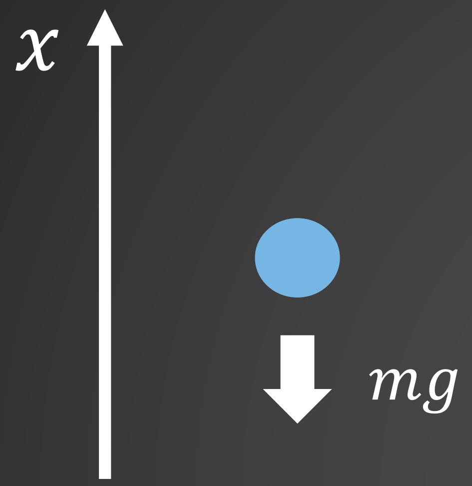
3: $1 < 4\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2$, **減衰振動**

$$x = [C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt]e^{-\frac{\kappa t}{2}}$$



http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/physics/category/mechanics/masspoint_mechanics/damped_harmonic_motion/image/dphm_critical_damping3.png

その1. 重力の下での落下運動



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

非斉次方程式に挑戦しましょう。非斉次方程式は特殊解を見つければ、斉次方程式にできるのでした。残念ながら、特殊解を見つける一般的な方法はないので場当たり的に解きます。

その1. 重力の下での落下運動

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Step1. 特殊解を見つける。
二階微分すると$-g$になるので、特殊解は、

$$x_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$

Step2. 一般解を$x = x' + x_0$ とおいて代入する。

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

その1. 重力の下での落下運動

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$$

Step3: 斉次方程式を解きます。$x' = e^{\gamma t}$を代入して、

$$\gamma^2 e^{\gamma t} = 0$$

$\gamma = 0$の重根なので、解の式

$$x_2 = A(t)e^{\gamma_0 t} = \left(C'_j t^{j-1} + \cdots + C'_2 t + C'_1\right) e^{\gamma_0 t}$$

に$j = 2, \gamma_0 = 0$を代入すると、

$$x' = C_1 t + C_0$$

その1. 重力の下での落下運動

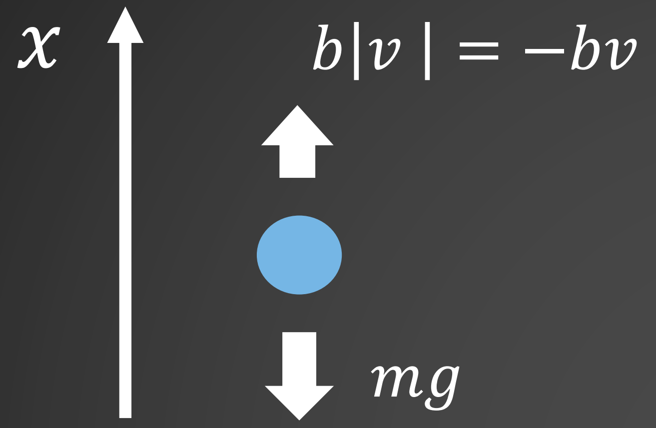
以上から解は、

$$x = x' + x_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_0$$

自由落下の問題を解くには大げさなやり方ですが、汎用性を感じてもらえたと思います。

力学では自由落下は一番最初に学びますが、微分方程式の観点から見ると、非斉次かつ重根の場合なので、ばねの振動よりレベルの高い問題に見えたりします。

その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = -mg$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \kappa\frac{dx}{dt} = -g$$

Step1. 特殊解を見つける。一回微分から $-g$ を出すと良さそうなので、

$$x_0 = -\frac{g}{\kappa}t$$

Step2. 一般解を$x = x' + x_0$ とおいて代入する。

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \kappa\frac{dx'}{dt} = 0$$

その2. 重力の下での落下運動＋速度に比例する空気抵抗

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \kappa\frac{dx'}{dt} = 0$$

Step3: 斉次方程式を解きます。$x' = e^{\gamma t}$を代入して、

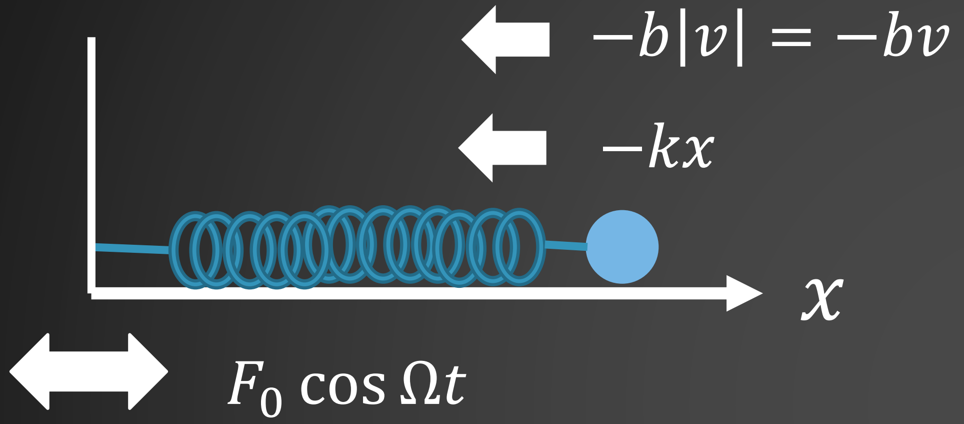
$$(\gamma^2 + \kappa\gamma)e^{\gamma t} = \gamma(\gamma + \kappa)e^{\gamma t} = 0$$

$\gamma = 0, -\kappa$なので、重根はありません。よって、

$$x' = C_1 e^{-\kappa t} + C_0$$

$$x = x' + x_0 = C_1 e^{-\kappa t} + C_0 - \frac{g}{\kappa}t$$

その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力（時間があれば）



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Step1. 特殊解を見つける。

微分方程式を複素数に拡張してみましょう。

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \kappa\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

実部が元の微分方程式に対応しています。

その5. ばねの振動＋速度に比例する空気抵抗＋周期的な外力（時間があれば）

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\kappa\frac{dz}{dt}+\omega^2z=\frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

この形にすると$z = Ce^{i\Omega t}$を考えれば代数方程式にできそうです。

$$\left(-\Omega^2+i\kappa\Omega+\omega^2\right)Ce^{i\Omega t}=\frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

係数Cが次の式を満たすものが特解です。

$$C=\frac{F_0}{m(-\Omega^2+i\kappa\Omega+\omega^2)}$$

斉次方程式の解はその4. で解いたので、特解と合わせれば解が得られます。

このセミナーのまとめ

- 微分方程式というと、様々な種類があって、問題毎に解き方が違う印象があったかも知れませんが、力学に限ってしまえば問題は二つに分類できます。

  1. ２階の線形斉次定数係数常微分方程式
  2. ２階の線形非斉次定数係数常微分方程式

- 非斉次方程式は特解を見つければ斉次方程式にすることができました。斉次方程式は、代数方程式の方法で解くことができます。
- 力学をマスターするには演習が大切です。地道なレベル上げを怠らないようにしましょう。