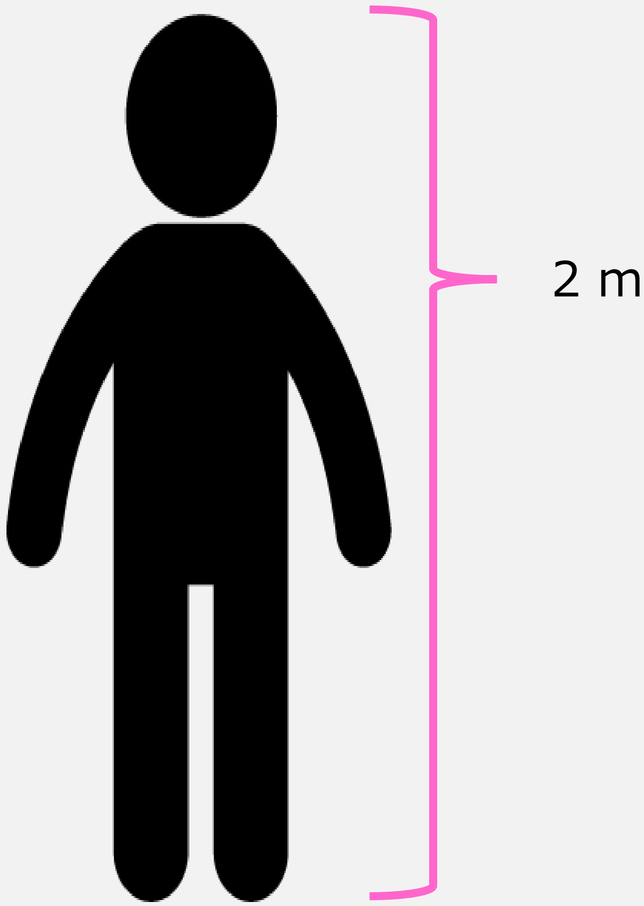
統計的仮説検定講習会

基礎工学研究科　M2
岡本

統計的仮説検定とは　(導入編)

例：道を歩いていると身長が2メートル程度の人が現れた
　　私は「日本人ではないだろうな」と考えた



仮説：2メートル以上の人は日本人じゃない

統計的仮説検定とは　(導入編)

仮説：2メートル以上の人は日本人じゃない

【数　学】：仮説は正しくない
理由 ⇒ だって100%そうだと言い切ることが出来ないから

【統計学】：仮説は正しい
理由 ⇒ だって95%くらいは合ってそうだからOKでしょ

有意水準

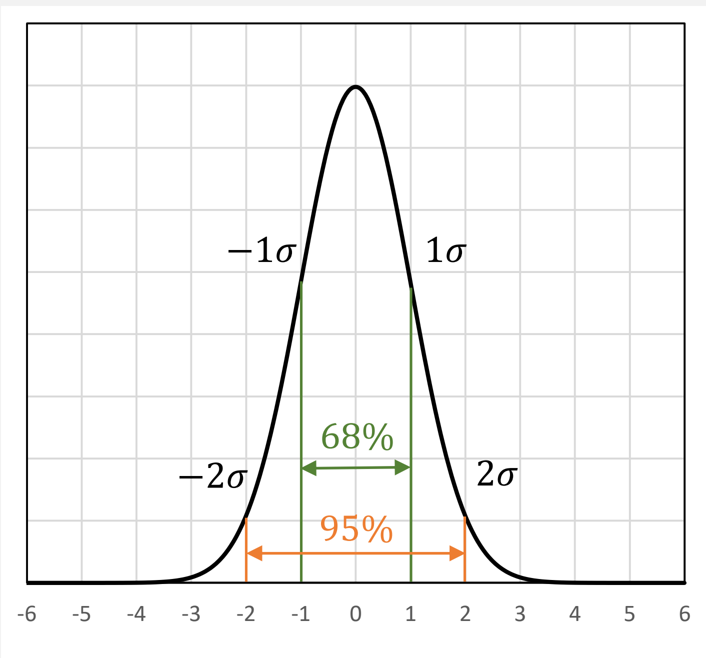
仮説を立て、有意水準を基に仮説が正しいか否かを判断する

⇒ 統計的仮説検定

仮説と有意水準だけではまだ不十分．．．
データがどんな分布に従うのか知る必要もアリ

（準備編）

正規分布（ガウス分布）

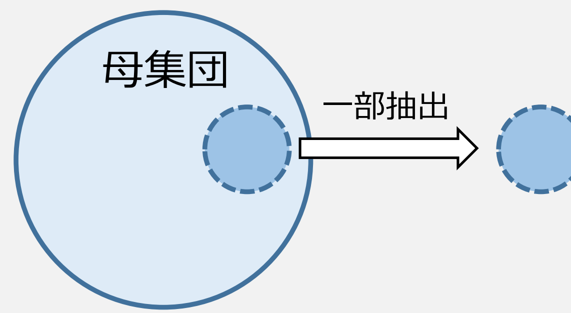


- 平均値と最頻値と中央値が一致
- 平均値を中心にして左右対称
- 確率密度関数

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

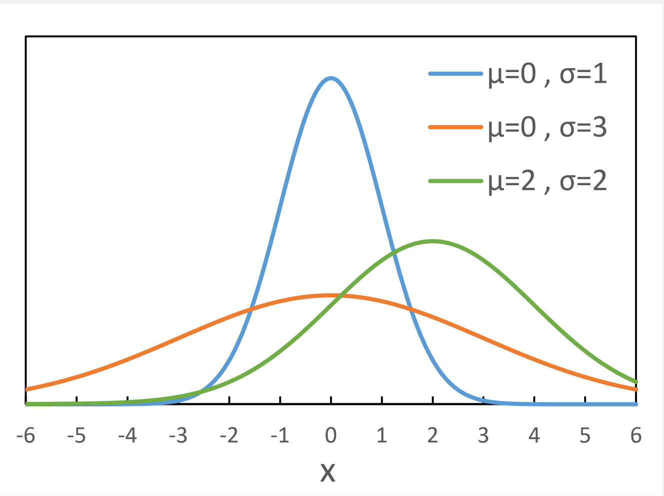
x　：各データの値
$\bar{x}$　：データの平均値
μ　：母平均
σ^2：母分散
σ　：母標準偏差



全ての標本の値を使った場合は「母」が付く

標準正規分布　（準備編）

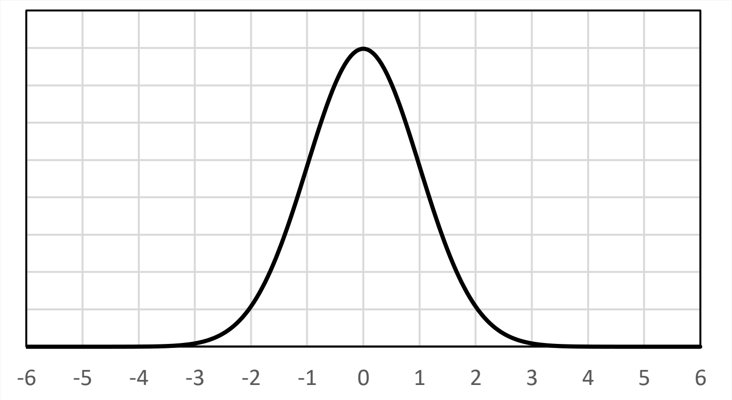
平均値と分散が異なると形が変わる..



母平均で引いてから
標準偏差で割る

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

標準正規分布　$(\mu = 0, \sigma = 1)$



どんな正規分布もこの形になる!!

そして、標準正規分布表を使えば
あらゆる正規分布の面積（確率）が分かる

中心極限定理　（準備編）

今回のテーマは「平均値」に関する仮説検定

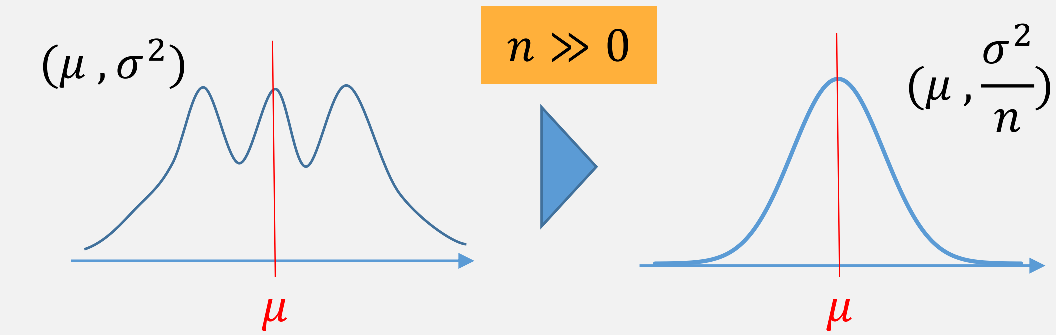
n個のデータから平均値を出して、それをプロットする作業を繰り返す

個々のデータが

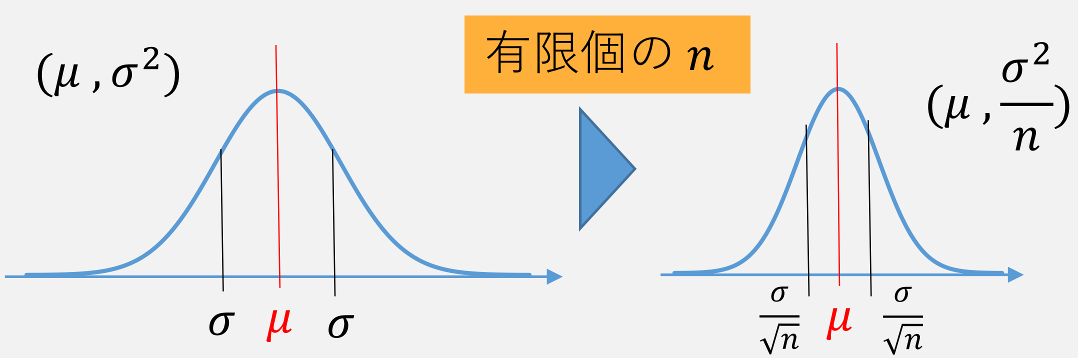
- 正規分布に従う
- 正規分布でない

場合、n個のサンプルの平均から作られる平均値の分布はどうなる？

正規分布でない



正規分布に従う



- 平均値はそのまま
- 分散が $\frac{\sigma^2}{n}$（標準偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$）つまりより凸な分布に変化
- 元の分布が正規分布でなくても正規分布になるが、<u>nが十分大きくないと成り立たない</u>ことに注意!!

仮説検定にチャレンジ

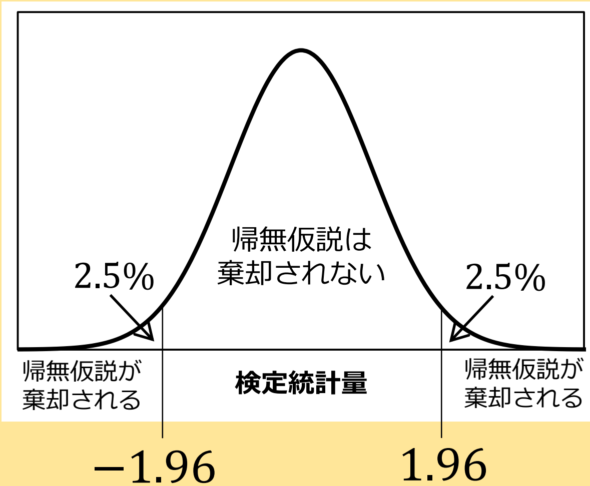
母平均の推定

ある工場では部品Aを製造している。製造された部品Aの中からランダムに9個を選び長さを測定したところ、平均値$\bar{X}$は49.4cmでした。部品Aの長さが正規分布N(μ,1.44)に従うとき、この工場で製造している部品Aの平均長さは50cmといえるか。有意水準0.05で検定せよ。

◆ **帰無仮説** ← 差がないという仮説
部品Aの平均長さは50cmである $\mu = 50$

◆ **対立仮説** ← 差があるという仮説
部品Aの平均長さは50cmではない $\mu \neq 50$

有意水準0.05とは?



標本平均分布は中心極限定理より正規分布N(μ,$\frac{1.44}{9}$)に従う

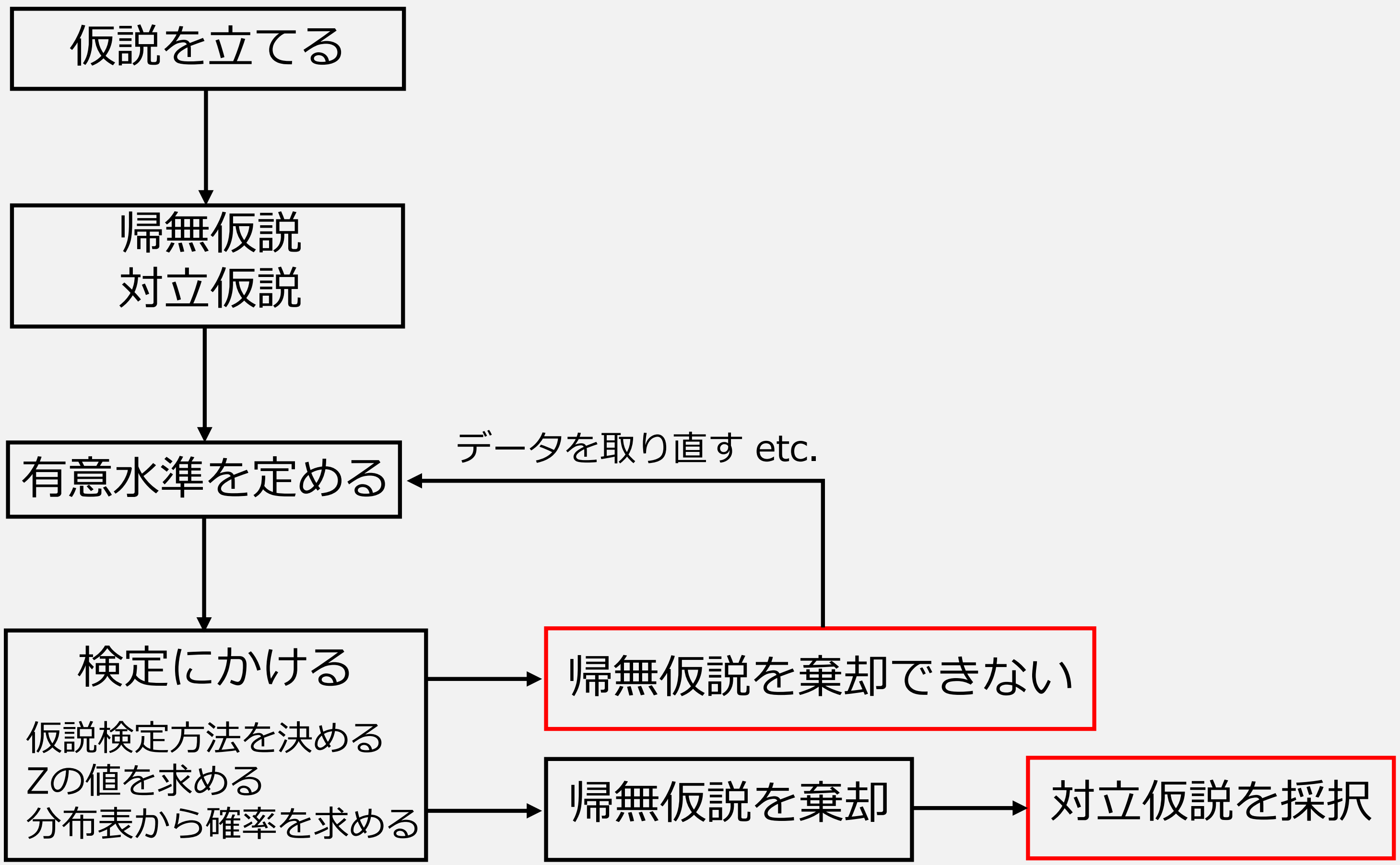
$Z = \frac{\bar{X}-50}{\sqrt{\frac{1.44}{9}}}$ は標準正規分布N(0,1)に従う

$$Z = \frac{49.4 - 50}{\sqrt{\frac{1.44}{9}}} = -1.5$$

有意差なし

ちなみに、平均長さが50cmである確率は0.133
これを**P値** (Probability)という
（つまり帰無仮説が生じる確率をさす）
「P=0.133>0.05 有意差なし」

仮説検定の流れ

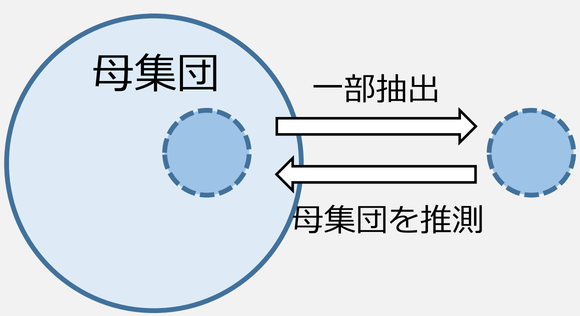

仮説を立てる
帰無仮説
対立仮説
有意水準を定める
データを取り直す etc.
検定にかける
仮説検定方法を決める
Zの値を求める
分布表から確率を求める
帰無仮説を棄却できない
帰無仮説を棄却
対立仮説を採択

不偏分散（母分散もどき）

前の例題は母分散が既知

標本全ては調べられない
だから世の中は母分散が未知

標本から母分散を推定



不偏分散

標本から母分散を推定
（不偏推定量という手法を用いて）

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

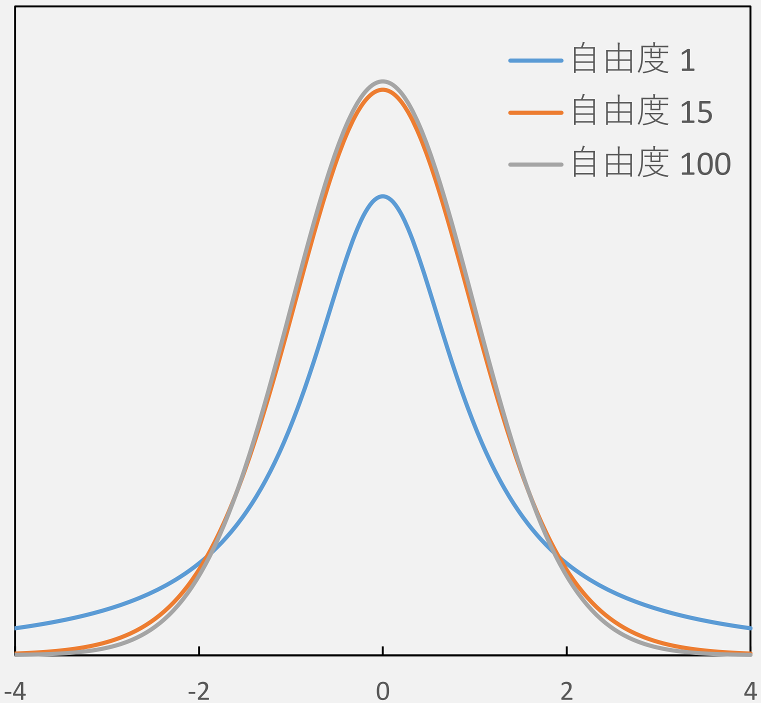
この値を母分散とみなす
サンプル数nが少ないときこれを使用する

サンプル数nが大きい場合は標本分散を母分散と考える場合もある

t分布（正規分布もどき）

母分散が分からない ⇒ 不偏分散を使用 ⇒ 正規分布を使えない…

t分布（スチューデント分布）



平均μ、不偏分散s^2の分布から抽出したn個の標本の平均$\bar{x}$から算出される統計量tは自由度(n-1)のt分布に従う

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

- nが大きいほど正規分布に近づく
- n < 30のときt分布を使う
- t分布表を用いて自由度を指定することで値を特定

不偏分散を使用した場合はt分布を使うべし

対応なしの検定　　(応用編)

2つの正規分布（σ_x, σ_yは未知）

- $N(\mu_x, \sigma_x)$, サンプル数:m, $\bar{x}$, 不偏分散:s_x^2
- $N(\mu_y, \sigma_y)$, サンプル数:n, $\bar{y}$, 不偏分散:s_y^2

⇒ 両者の平均値の差を検定したい

2つの分布に相互関係はないため、対応なし
異なる対象から抽出された2つの標本は対応のないデータ

◆ 帰無仮説　$\mu_x = \mu_y$

◆ 対立仮説　$\mu_x \neq \mu_y$

① 等分散性の確認
2つの正規分布の分散(σ_x, σ_y)に有意な差があるのか　例：F検定

② 等分散性である ⇒ t検定

$$T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}}}$$

t分布の自由度

$$df = m + n - 2$$

② 等分散性でない ⇒ Welchのt検定

$$T_w = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n}}}$$

t分布の自由度

$$df = \left(\frac{s_x^2}{m} + \frac{s_y^2}{n}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{s_x^2}{m}\right)^2}{m-1} + \frac{\left(\frac{s_y^2}{n}\right)^2}{n-1}\right\}$$

対応ありの検定　(応用編)

同一の対象から抽出された「対」となる2つの標本は対応のあるデータ

例：5人の被験者に投薬実験を行った ⇒ 薬が有意に効いたのか? (有意水準は0.05)

被験者No.	投与前	投与後	差 投与前ー投与後
1	180	150	30
2	130	135	-5
3	175	145	30
4	155	150	5
5	130	140	-10
平均	154	144	10

◆ 帰無仮説　$\mu_b - \mu_a = \mu = 0$

◆ 対立仮説　$\mu_b - \mu_a = \mu \neq 0$

μ :両者の差の母平均

s^2:両者の差の不偏分散

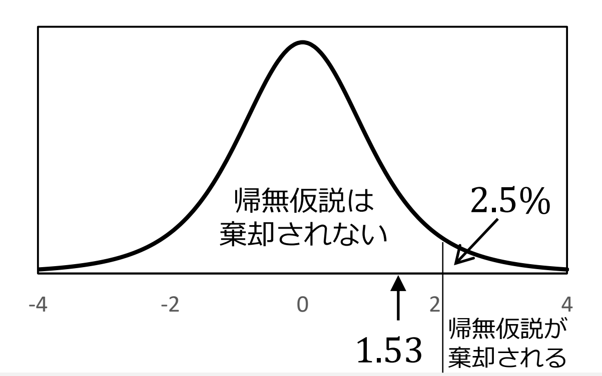
$$s^2 = \frac{1}{5-1}\{(30-10)^2 + (-5-10)^2 + \cdots\} = 212.5$$

$\bar{d}$:差の平均値

$$t = \frac{\bar{d}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{10-0}{\sqrt{\frac{212.5}{5}}} \approx 1.53$$

ちなみに、この検定を
Paired t 検定という

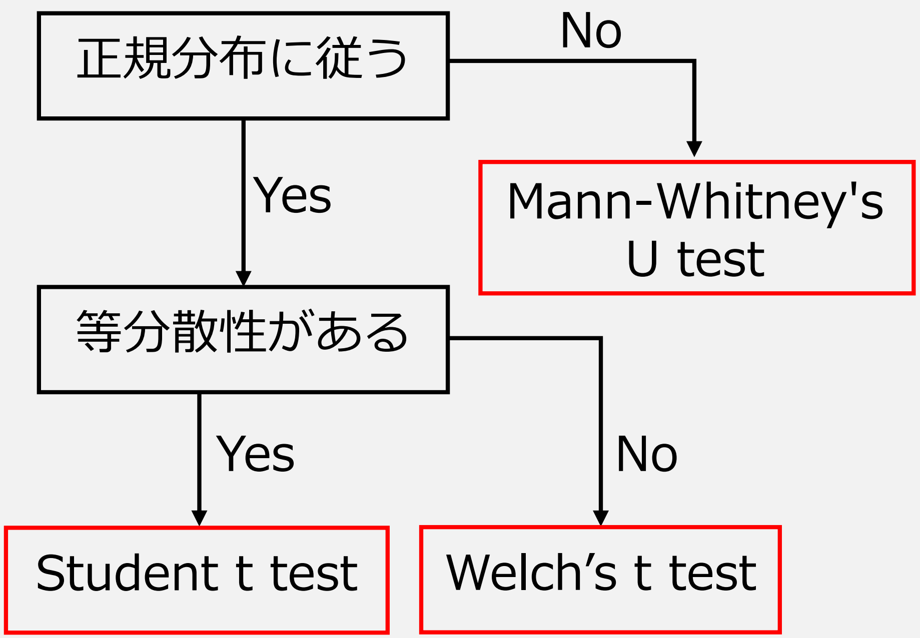
自由度4のt分布



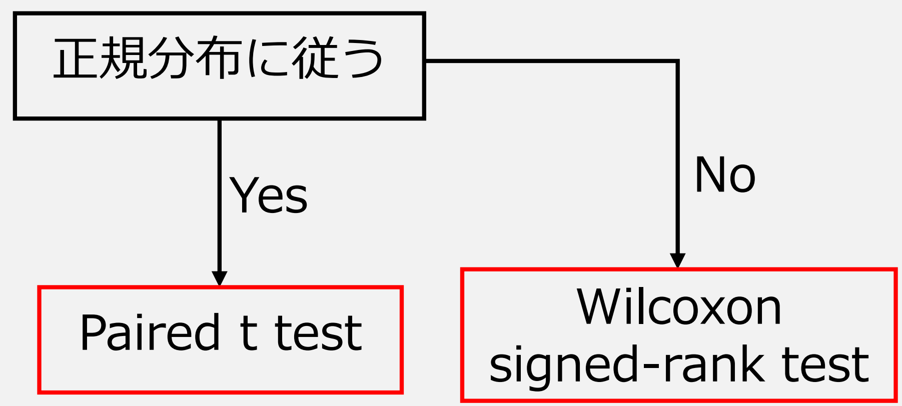
有意差なし

まとめ　(応用編)

対応のない2群の平均値の検定



対応のある2群の平均値の検定



パラメトリック検定

ある特定の分布の仮説を設ける検定
母集団が正規分布 or 比率尺度の連続したデータ

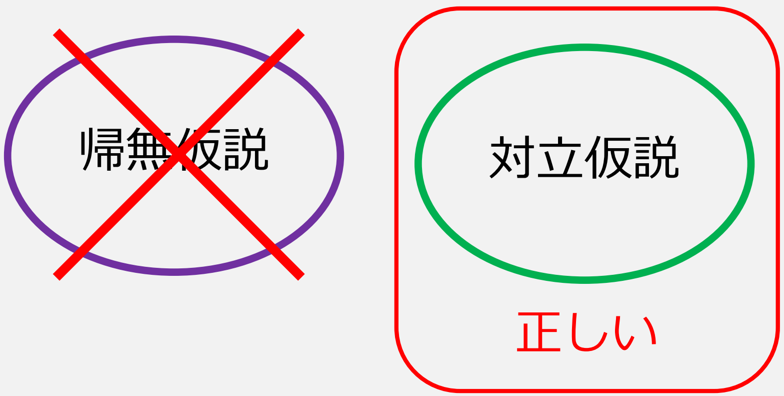
ノンパラメトリック検定

母集団に特定の分布を仮定しない検定
正規分布を成しておらず母数が決められないデータに用いる

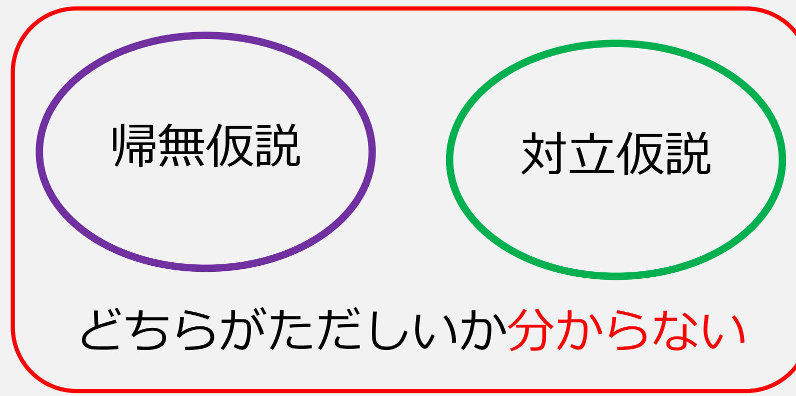
仮説検定の注意点 1

”帰無仮説を棄却しない = 帰無仮説を受容する” ではない！

帰無仮説を棄却する場合



帰無仮説を棄却できない場合



証拠不十分で棄却出来なかった
新たなデータで棄却を目指す

検定の多重性

でも起こる可能性がある

参考：株式会社AVILEN (2019-01-16)「仮説検定とは？初心者にもわかりやすく解説！」『to-kei.net』https://to-kei.net/hypothesis-testing/about-2/, (参照 2019-11-21)

仮説検定の注意点 2

第一種の過誤

本当は有意差がないのに、誤って差があると判断すること
（帰無仮説が正しいのに、棄却した）
有意水準が大きい(5%)と帰無仮説を棄却するリスクが高まる

第二種の過誤

本当は有意差があるのに、誤って差がないと判断すること
（帰無仮説が正しくないのに、帰無仮説を採用した）
有意水準が小さい(１%)、サンプルサイズが小さい場合に生じる

H_0 ：帰無仮説（有意差がない）
H_1 ：対立仮説（有意差がある）

	H_0が正しい	H_1が正しい
H_0を棄却	第一種の過誤	正しい
H_0を棄却しない	正しい	第二種の過誤

最後に

今回は平均値を例にして仮説検定の流れを紹介しました
　+様々な検定の種類（例:対応なし、ありとか）
　+検定の注意点

統計検定はExcelなどの表ソフトに標準装備されています
つまり、データと有意水準が決まれば、
ボタンをクリックするだけで有意差を判定してくれます

「データの有意差を評価する際、どの手法で仮説検定すれば適切なのか」
この判断にこの講座が役立てればうれしいです

このセミナーに参加してくれてありがとうございました

参考文献

- スバラシク実力がつくと評判の統計学キャンパス・ゼミ：
  大学の数学がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる! /
  馬場敬之著

  https://opac.library.osaka-u.ac.jp/opac/opac_link/bibid/2004348915

- 統計web (t検定の例題)

  https://bellcurve.jp/statistics/course/10004.html (参照 2019-11-21)