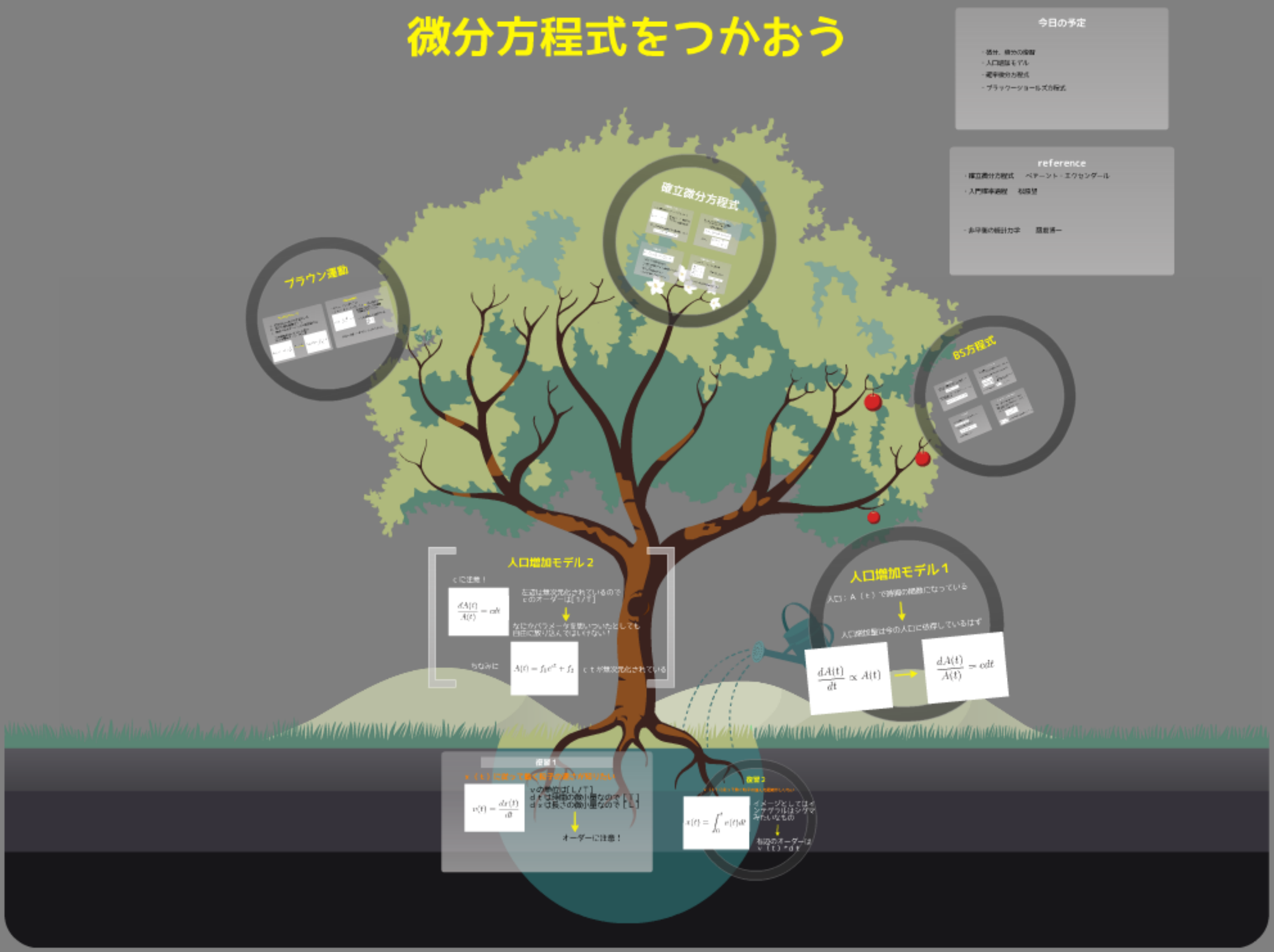
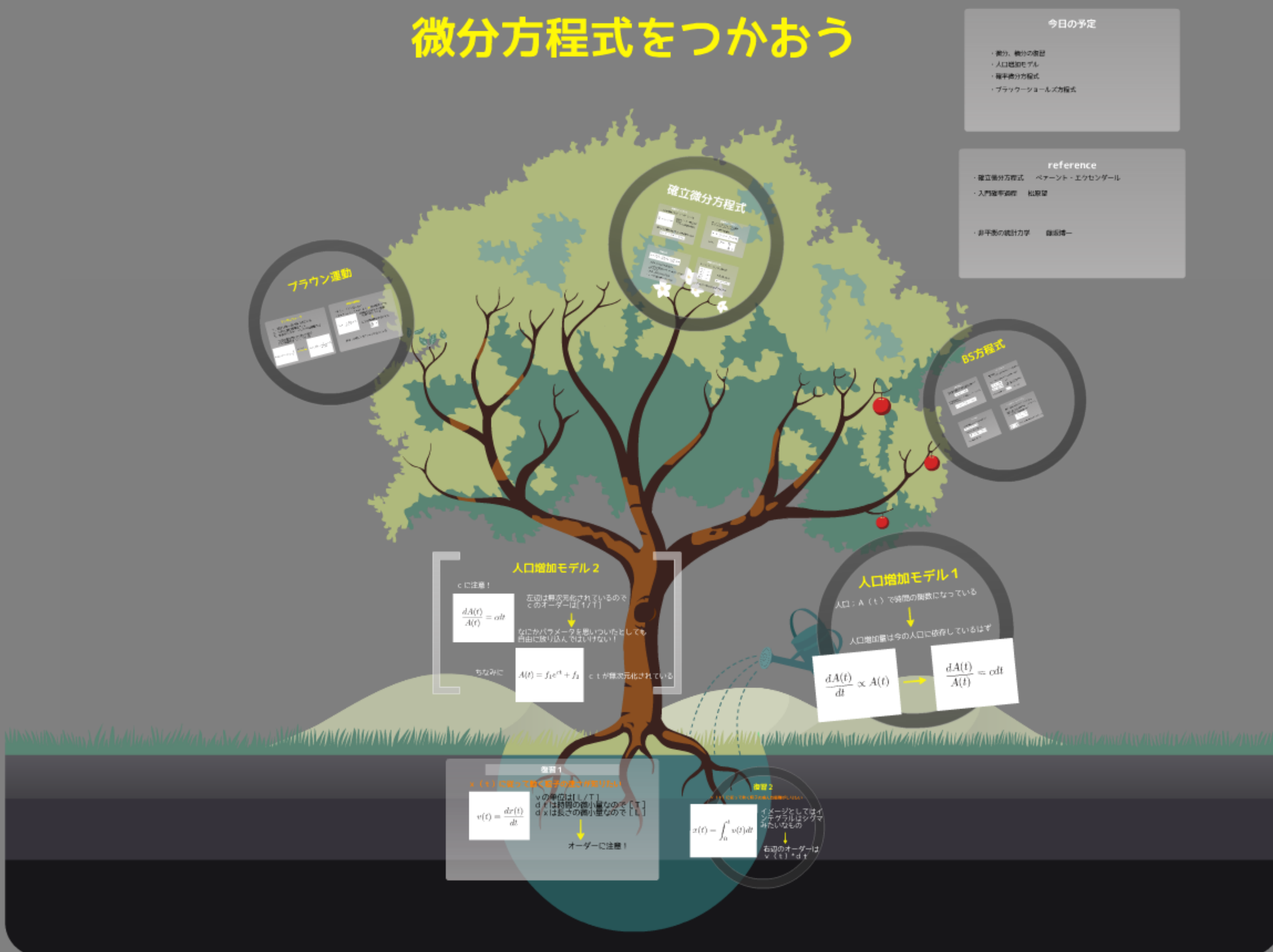


微分方程式をつかおう
今日の予定
・ブラックーショールズ方程式
reference
確立微分方程式
ブラウン運動
BS方程式
人口増加モデル２
cに注意！
ちなみに
人口増加モデル１
人口：A（t）で時間の関数になっている
人口増加量は今の人口に依存しているはず
$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
復習１
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
オーダーに注意！
復習２


微分方程式をつかおう
今日の予定
・微分、積分の復習
・人口増加モデル
・確率微分方程式
・ブラック―ショールズ方程式
reference
・確立微分方程式　ベァーント・エクセンダール
・入門確率過程　松原望
・非平衡の統計力学　藤坂博一
ブラウン運動
確立微分方程式
BS方程式
人口増加モデル２
ｃに注意！
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]
なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！
ちなみに
$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$
ｃｔが無次元化されている
人口増加モデル１
人口：Ａ（ｔ）で時間の関数になっている
人口増加量は今の人口に依存しているはず
$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
復習１
ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので[Ｔ]
ｄｘは長さの微小量なので[Ｌ]
オーダーに注意！
復習２
$x(t) = \int_0^t v(t)dt$
イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの
右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）＊ｄｔ

今日の予定

- 微分、積分の復習
- 人口増加モデル
- 確率微分方程式
- ブラックーショールズ方程式

復習１

ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので［Ｔ］
ｄｘは長さの微小量なので［Ｌ］

オーダーに注意！

オーダーに注意！

復習２

ｖ（ｔ）に従って動く粒子の進んだ距離がしりたい

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt$$

イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの

↓

右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）*ｄｔ

人口増加モデル１

人口；Ａ（ｔ）で時間の関数になっている

↓

人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$

→

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$$

人口増加モデル２

ｃに注意！

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$$

左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]

↓

なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！

ちなみに

$$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$$

ｃｔが無次元化されている

ブラウン運動

ランダムウォーク

1．粒子は各一次元格子点にいる
2．左右に進む確率は1/2
3．原点からスタートしてM回移動する

二項定理を用いればｎに粒子
がいる確率Ｗ（ｎ、Ｍ）は

$$W(n,M) = {}_M C_{\frac{M+n}{2}} \frac{1}{2^M} \xrightarrow{\text{スターリングの公式}} W(n,M) = \frac{2}{\sqrt{\pi M}} e^{-\frac{n^2}{M}}$$

時間の連続化

・Ｗ（ｘ、ｔ）に直したい
・ｘ＝ｎ・Δｒ、ｔ＝Ｍ・Δｔ ← 刻み幅をつけた

$$W(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\Delta t}{t}} e^{-\frac{x^2}{t}\frac{\Delta t}{\Delta r^2}}$$

指数部分のデルタが問題
（分散を表している）

↓

二つの刻み幅を対応させる

$$\frac{\Delta t}{\Delta r^2} = 1$$

Ｗはｘに関してガウシャンになっている

ランダムウォーク

１．粒子は各一次元格子点にいる

２．左右に進む確率は１／２

３．原点からスタートしてM回移動する

二項定理を用いればｎに粒子
がいる確率Ｗ（ｎ、Ｍ）は

$$W(n,M) = {}_M C_{\frac{M+n}{2}} \frac{1}{2^M}$$

スターリングの公式

$$W(n,M) = \frac{2}{\sqrt{\pi M}} e^{-\frac{n^2}{M}}$$

時間の連続化

・Ｗ（ｘ、ｔ）に直したい

・ｘ＝ｎ・Δｒ、ｔ＝Ｍ・Δｔ ← 刻み幅をつけた

$$W(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\Delta t}{t}}e^{-\frac{x^2}{t}\frac{\Delta t}{\Delta r^2}}$$

指数部分のデルタが問題
（分散を表している）

↓

二つの刻み幅を対応させる

$$\frac{\Delta t}{\Delta r^2} = 1$$

Ｗはｘに関してガウシャンになっている

確立微分方程式

伊藤積分（その１）

・人口増加モデルに”ノイズ”を入れる

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t$$

Wはウィーナー過程に従うはず
（ブラウン運動の性質）

次にこれを差分方程式として書き換えてみる

$$X_{t+1} - X_t = b(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)W_t\Delta t$$

伊藤積分（その２）

W・Δｔもまたウィーナー過程
そこであらためてｄＢとおく

ｔ秒後の位置は

$$X_t = X_0 + \int b(t, X_t)dt + \int \sigma(t, X_t)dB_t$$

ただし

$$\begin{aligned} \int B_t dB_t &\neq \frac{{B_t}^2}{2} \\ &= \frac{{B_t}^2}{2} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

伊藤公式

$$dY(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial t}dt + \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}dX(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2}(dX(t))^2$$

このような公式が成り立つ

・二次でに変数のテイラー展開をした形になっている

・他の二次の項は０になる

・ｄＸの二乗の項はｄｔになる

伊藤の公式（例）

Ｙ（ｔ）がＸ（ｔ）の二乗の時

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} &= 2X(t) \\ \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} &= 2 \end{aligned}$$

が成り立つので

$$dY(t) = dt + 2X(t)dX(t)$$

これにより先ほどの結果が得られる

伊藤積分（その１）

・人口増加モデルに“ノイズ”を入れる

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) W_t$$

Wはウィーナー過程に従うはず
（ブラウン運動の性質）

次にこれを差分方程式として書き換えてみる

$$X_{t+1} - X_t = b(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t) W_t \Delta t$$

伊藤積分（その２）

Ｗ・Δｔもまたウィーナー過程
そこであらためてｄＢとおく

ｔ秒後の位置は

$$X_t = X_0 + \int b(t, X_t)dt + \int \sigma(t, X_t)dB_t$$

ただし

$$\begin{aligned} \int B_t dB_t &\neq \frac{{B_t}^2}{2} \\ &= \frac{{B_t}^2}{2} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

伊藤公式

$$dY(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial t}dt + \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}dX(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2}(dX(t))^2$$

このような公式が成り立つ

・二次でに変数のテイラー展開をした形になっている

・他の二次の項は０になる

・ｄＸの二乗の項はｄｔになる

伊藤の公式（例）

Ｙ（ｔ）がＸ（ｔ）の二乗の時

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y(t)}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} &= 2X(t) \\
\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} &= 2
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$dY(t) = dt + 2X(t)dX(t)$$

これにより先ほどの結果が得られる

BS方程式

金融派生商品

先ほどまでの議論に従い株価Ｓに対する過程を次のように書く（本当はＷ（ｔ）と書くべき？）

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

ある金融派生商品があり、その価格をＶ（Ｓ，ｔ）とする
伊藤の公式を使えば、

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial V^2}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW$$

self-financing

・自己調達性
キャッシュフローは証券価格のみによって形成される

つまり、株式Ｓと証券Ｂのみからなる市場があれば

$R = Sx + By$ として、

$Sdx + Bdy = 0$ が成り立つように確立微分方程式に条件を与える

ただしＢは債権なので $B = e^{ct}$ としておく

ＢＳ方程式

ＲがＶの複製になっていなければならない

$$dR = (x\mu S + yrB)dt + x\sigma S dW$$

これとｄＶが等しいと思って

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial V^2}{\partial S^2} + cS\frac{\partial V}{\partial S} = cV$$

ＢＳ方程式が得られた

ヨーロピアン・コールオプション

満期Ｔ、価格Ｕで行使できるオプションを考える

時刻Ｔでのオプション価格が決まっているのでＴ－ｔを新たな変数とする

さらに以下のような変数変換をすると

$$V(s,t) = e^{ct}V(\hat{S},t)$$
$$s = \frac{1}{\sigma}(logS + (\frac{\sigma^2}{2} - c)t)$$

$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$ このような拡散方程式を得ることができる

金融派生商品

先ほどまでの議論に従い株価Ｓに対する過程を次のように書く（本当はＷ（ｔ）と書くべき？）

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

ある金融派生商品があり、その価格をＶ（Ｓ，ｔ）とする
伊藤の公式を使えば、

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial V^2}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW$$

self-financing

・自己調達性
キャッシュフローは証券価格のみによって形成される

つまり、株式Ｓと証券Ｂのみからなる市場があれば

$$R = Sx + By$$

として、

$$Sdx + Bdy = 0$$

が成り立つように確立微分方程式に条件を与える

ただしＢは債権なので $B = e^{ct}$ としておく

ＢＳ方程式

ＲがＶの複製になっていなければならない

$$dR = (x\mu S + yrB)dt + x\sigma S dW$$

これとｄＶが等しいと思って

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial V^2}{\partial S^2} + cS\frac{\partial V}{\partial S} = cV$$

ＢＳ方程式が得られた

ヨーロピアン・コールオプション

満期Ｔ、価格Ｕで行使できるオプションを考える

時刻Ｔでのオプション価格が決まっているのでＴ－ｔを新たな変数とする

さらに以下のような変数変換をすると

$$V(s,t) = e^{ct} V(\grave{S}, t)$$

$$s = \frac{1}{\sigma}(logS + (\frac{\sigma^2}{2} - c)t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

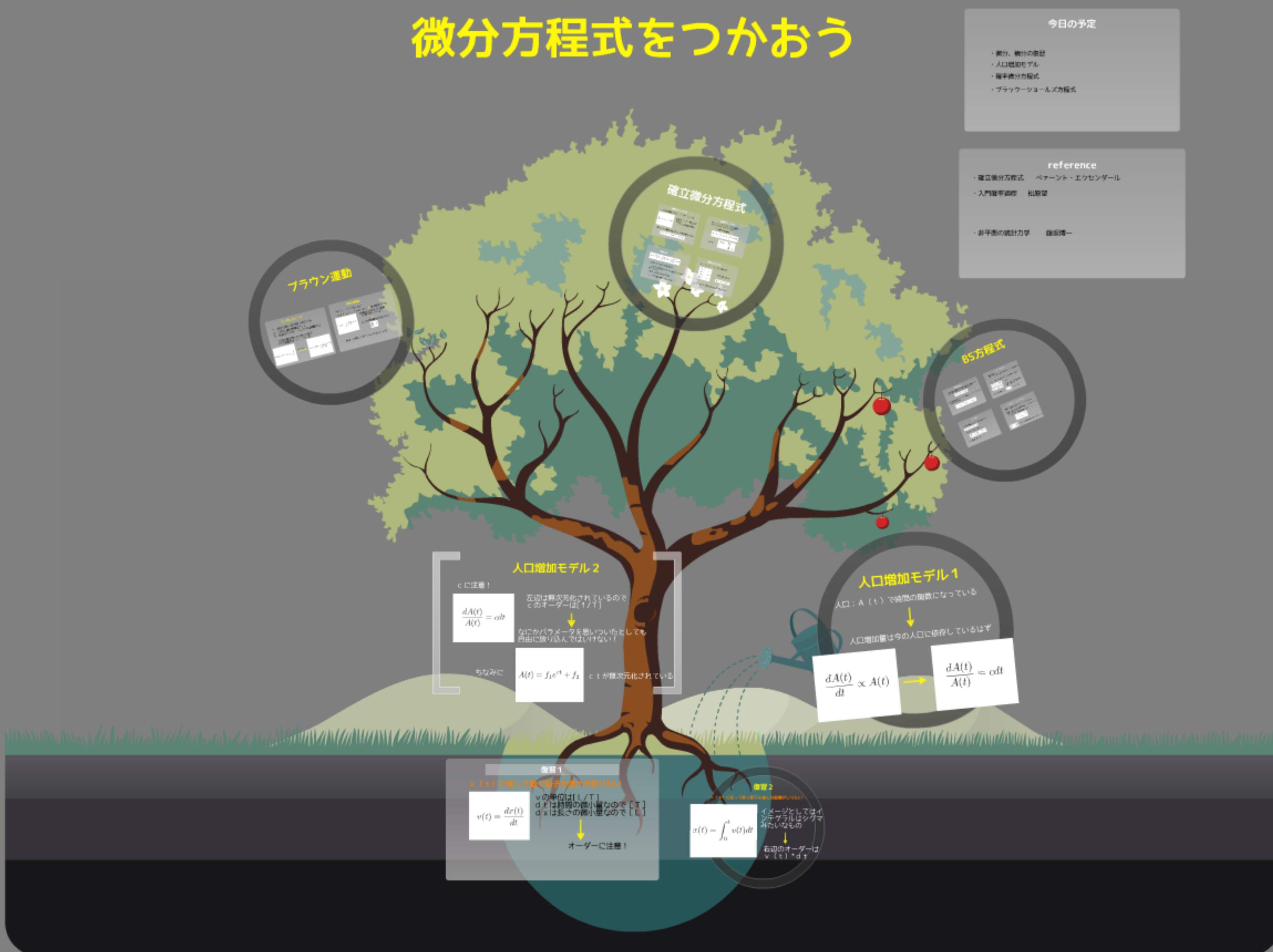
このような拡散方程式を得ることができる

reference

・確立微分方程式　ベァーント・エクセンダール

・入門確率過程　松原望

・非平衡の統計力学　藤坂博一



微分方程式をつかおう
今日の予定
・微分、積分の復習
・人口増加モデル
・確率微分方程式
・ブラックーショールズ方程式
reference
・確立微分方程式 ベァーント・エクセンダール
・入門確率過程 松原望
・非平衡の統計力学
ブラウン運動
確立微分方程式
BS方程式
人口増加モデル２
ｃに注意！
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]
なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！
ちなみに
$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$
ｃｔが無次元化されている
人口増加モデル１
人口：Ａ（ｔ）で時間の関数になっている
人口増加量は今の人口に依存しているはず
$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
復習１
ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので［Ｔ］
ｄｘは長さの微小量なので［Ｌ］
オーダーに注意！
復習２
$x(t) = \int_0^t v(t)dt$
イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの
右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）＊ｄｔ