

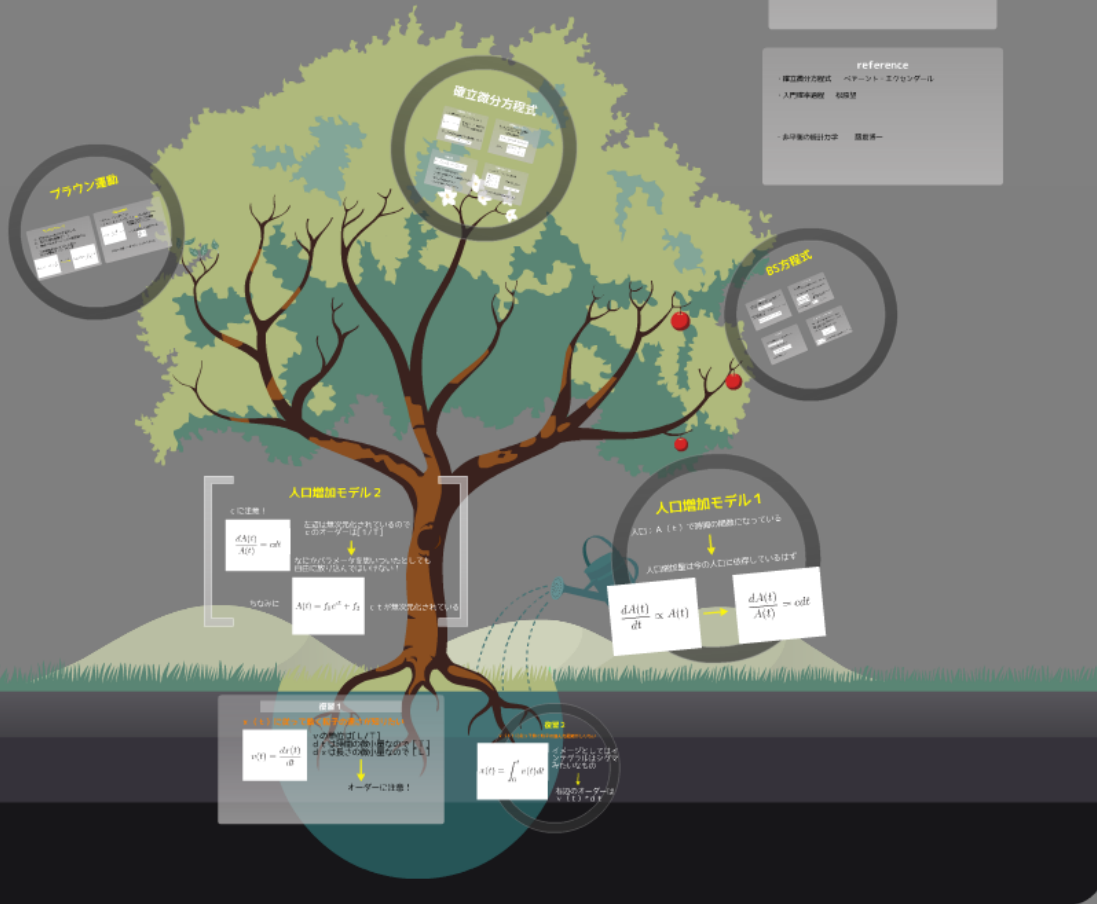
# 微分方程式をつかおう

## 今日の予定

- 誘引、種々の誘引
- 人口増加モデル
- 微分方程式の解法
- プラントクォールズでの解法

## reference

- 確立微分方程式 ベトナム・エフレンジャー
- 入門微分方程式 松田賢
- 大学数学の面白さ 藤原真一



# 微分方程式をつかおう

- 今日の予定
- ・微分、積分の復習
  - ・人口増加モデル
  - ・線形微分方程式
  - ・ブレイクウェルシュローズ方程式

- reference
- ・確立微分方程式 ベアレント・エウセンダール
  - ・入門線形代数 松野健
  - ・非平衡の統計力学 藤田博一

ブラウン運動

確立微分方程式

B5方程式

人口増加モデル2

cに注意!

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = ct$$

左辺は無次元で定まっているので  
cのオーダーは[1/T]

右辺がバリエーションを思いついたとしても  
自由に仮定するのはいけない!

ちなみに  $A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$  cが無次元化されている

人口増加モデル1

人口:  $A(t)$  で時間の関数になっている

人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

例題1

$v(t)$  に従って  $x(t)$  の値が変化する

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

vの単位は[L/T]  
dxは時間の間隔Δtなので[T]  
Δxは長さを測るので[L]

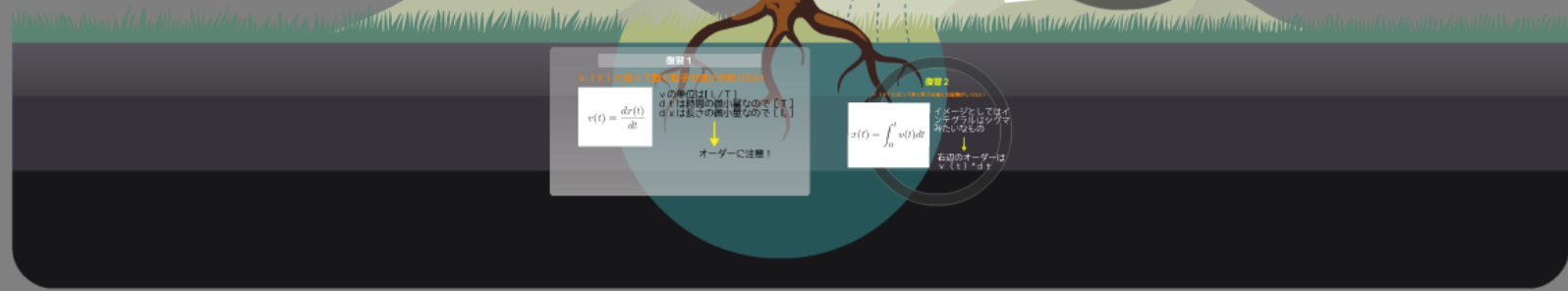
オーダーに注意!

例題2

イメージとしてダイ  
ナミカルシステ  
ムにのみ

$$x(t) = \int_a^t v(t) dt$$

右辺のオーダーは  
 $\times [t] \cdot [dx]$



# 今日の予定

- ・ 微分、積分の復習
- ・ 人口増加モデル
- ・ 確率微分方程式
- ・ ブラックーショールズ方程式

## 復習 1

$x(t)$  に従って動く粒子の速さが知りたい

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$v$  の単位は  $[L/T]$

$dt$  は時間の微小量なので  $[T]$

$dx$  は長さの微小量なので  $[L]$



オーダーに注意!



オーダーに注意！

## 復習 2

$v(t)$  に従って動く粒子の進んだ距離が知りたい

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt$$

イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの



右辺のオーダーは  $v(t) * dt$

# 人口増加モデル1

人口；  $A(t)$  で時間の関数になっている



人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$



$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

## 人口増加モデル2

c に注意！

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

左辺は無次元化されているので  
c のオーダーは[1/T]



なにかパラメータを思いついたとしても  
自由に放り込んではいけません！

ちなみに

$$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$$

c t が無次元化されている



# ブラウン運動

## ランダムウォーク

1. 粒子は各一次元格子点にいる
2. 左右に進む確率は1/2
3. 原点からスタートしてM回移動する

二項定理を用いればnに粒子がいる確率W(n, M)は

$$W(n, M) = \binom{M}{\frac{M+n}{2}} \frac{1}{2^M}$$

スターリングの近似

$$W(n, M) = \frac{2}{\sqrt{\pi M}} e^{-\frac{x^2}{M}}$$

## 時間の連続化

- ・ W(x, t) に直したい
- ・  $x = n \cdot \Delta r$ ,  $t = M \cdot \Delta t$  ← 刻み幅をつけた

$$W(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Delta t}{t}} e^{-\frac{x^2}{M \Delta r^2}}$$

指数部分のデルタが問題  
(分散を表している)

↓  
二つの刻み幅を対応させる

$$\frac{\Delta t}{\Delta r^2} = 1$$

Wはxに関してガウシャンになっている

# ランダムウォーク

1. 粒子は各一次元格子点にいる
2. 左右に進む確率は  $1/2$
3. 原点からスタートして  $M$  回移動する

二項定理を用いれば  $n$  に粒子がいる確率  $W(n, M)$  は

$$W(n, M) = {}_M C_{\frac{M+n}{2}} \frac{1}{2^M}$$

スターリングの公式



$$W(n, M) = \frac{2}{\sqrt{\pi M}} e^{-\frac{n^2}{M}}$$

## 時間の連続化

- ・  $W(x, t)$  に直したい
- ・  $x = n \cdot \Delta r$ 、 $t = M \cdot \Delta t$  ← 刻み幅をつけた

$$W(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Delta t}{t}} e^{-\frac{x^2}{t} \frac{\Delta t}{\Delta r^2}}$$

指数部分のデルタが問題  
(分散を表している)

↓  
二つの刻み幅を対応させる

$$\frac{\Delta t}{\Delta r^2} = 1$$

Wはxに関してガウシアンになっている

# 確立微分方程式

## 伊藤積分（その1）

・人口増加モデルに“ノイズ”を入れる

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t$$

Wはウィーナー過程に従うはず  
(ブラウン運動の性質)

次にこれを差分方程式として書き換えてみる

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)W_t\Delta t$$

## 伊藤積分（その2）

W・Δtもまたウィーナー過程  
そこであらためてdBとおく

t秒後の位置は

$$X_t = X_0 + \int b(t, X_t)dt + \int \sigma(t, X_t)dB_t$$

ただし

$$\int B_t dB_t \neq \frac{B_t^2}{2} \\ = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$

## 伊藤公式

$$dY(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial t}dt + \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} (dX(t))^2$$

このような公式が成り立つ

- ・二次での変数のテイラー展開をした形になっている
- ・他の二次の項は0になる
- ・dXの二乗の項はdtになる

## 伊藤の公式（例）

Y(t)がX(t)の二乗の時

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} = 2X(t) \\ \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} = 2$$

が成り立つので

$$dY(t) = dt + 2X(t)dX(t)$$

これにより先ほどの結果が得られる

# 伊藤積分（その1）

- ・ 人口増加モデルに“ ノイズ ” を入れる

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t$$

Wはウィーナー過程に従うはず  
(ブラウン運動の性質)

次にこれを差分方程式として書き換えてみる

$$X_{t+1} - X_t = b(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)W_t\Delta t$$

## 伊藤積分（その2）

$W \cdot \Delta t$  もまたウィーナー過程  
そこであらためて  $dB$  とおく

$t$  秒後の位置は

$$X_t = X_0 + \int b(t, X_t) dt + \int \sigma(t, X_t) dB_t$$

ただし

$$\begin{aligned} \int B_t dB_t &\neq \frac{B_t^2}{2} \\ &= \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

# 伊藤公式

$$dY(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial t} dt + \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} (dX(t))^2$$

このような公式が成り立つ

- ・ 二次での変数のテイラー展開をした形になっている
- ・ 他の二次の項は0になる
- ・  $dX$ の二乗の項は  $dt$  になる

# 伊藤の公式（例）

Y ( t ) が X ( t ) の二乗の時

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y(t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} &= 2X(t) \\ \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial X(t)^2} &= 2\end{aligned}$$

が成り立つので

$$dY(t) = dt + 2X(t)dX(t)$$

これにより先ほどの結果が得られる



# BS方程式

## 金融派生商品

先ほどまでの議論に従い株価  $S$  に対する過程を次のように書く (本当は  $W(t)$  と書くべき?)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

ある金融派生商品があり、その価格を  $V(S, t)$  とする  
伊藤の公式を使えば、

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW$$

## self-financing

・自己調達性  
キャッシュフローは証券価格のみによって形成される

つまり、株式  $S$  と証券  $B$  のみからなる市場があれば

$$R = Sx + By \quad \text{として、}$$

$$Sdx + Bdy = 0 \quad \text{が成り立つように確立微分方程式に条件を与える}$$

ただし  $B$  は債権なので  $B = e^{rt}$  としておく

## BS方程式

$R$  が  $V$  の複製になっていなければならない

$$dR = (rV + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

これと  $dV$  が等しいと思って

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

BS方程式が得られた

## ヨーロッパン・コールオプション

満期  $T$ 、価格  $U$  で行使できるオプションを考える

時刻  $T$  でのオプション価格が決まっているので  $T-t$  を新たな変数とする

さらに以下のような変数変換をすると

$$V(s, \tau) = e^{-r\tau} V(S, t) \\ s = \frac{1}{\sigma} (\ln S + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \quad \text{このような拡散方程式を得ることができる}$$

## 金融派生商品

先ほどまでの議論に従い株価  $S$  に対する過程を次のように書く（本当は  $W(t)$  と書くべき？）

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

ある金融派生商品があり、その価格を  $V(S, t)$  とする  
伊藤の公式を使えば、

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW$$

## self-financing

- ・ 自己調達性

キャッシュフローは証券価格のみによって形成される

つまり、株式  $S$  と証券  $B$  のみからなる市場があれば

$$R = Sx + By$$

として、

$$Sdx + Bdy = 0$$

が成り立つように確立微分方程式に条件を与える

ただし  $B$  は債権なので

$$B = e^{ct}$$

としておく

## BS 方程式

R が V の複製になっていなければならない

$$dR = (x\mu S + yrB)dt + x\sigma SdW$$

これと dV が等しいと思って

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + cS \frac{\partial V}{\partial S} = cV$$

BS 方程式が得られた

# ヨーロピアン・コールオプション

満期  $T$ 、価格  $U$  で行使できるオプションを考える

時刻  $T$  でのオプション価格が決まっているので  $T - t$  を新たな変数とする

さらに以下のような変数変換をすると

$$V(s, t) = e^{ct} V(\tilde{S}, t)$$
$$s = \frac{1}{\sigma} \left( \log S + \left( \frac{\sigma^2}{2} - c \right) t \right)$$

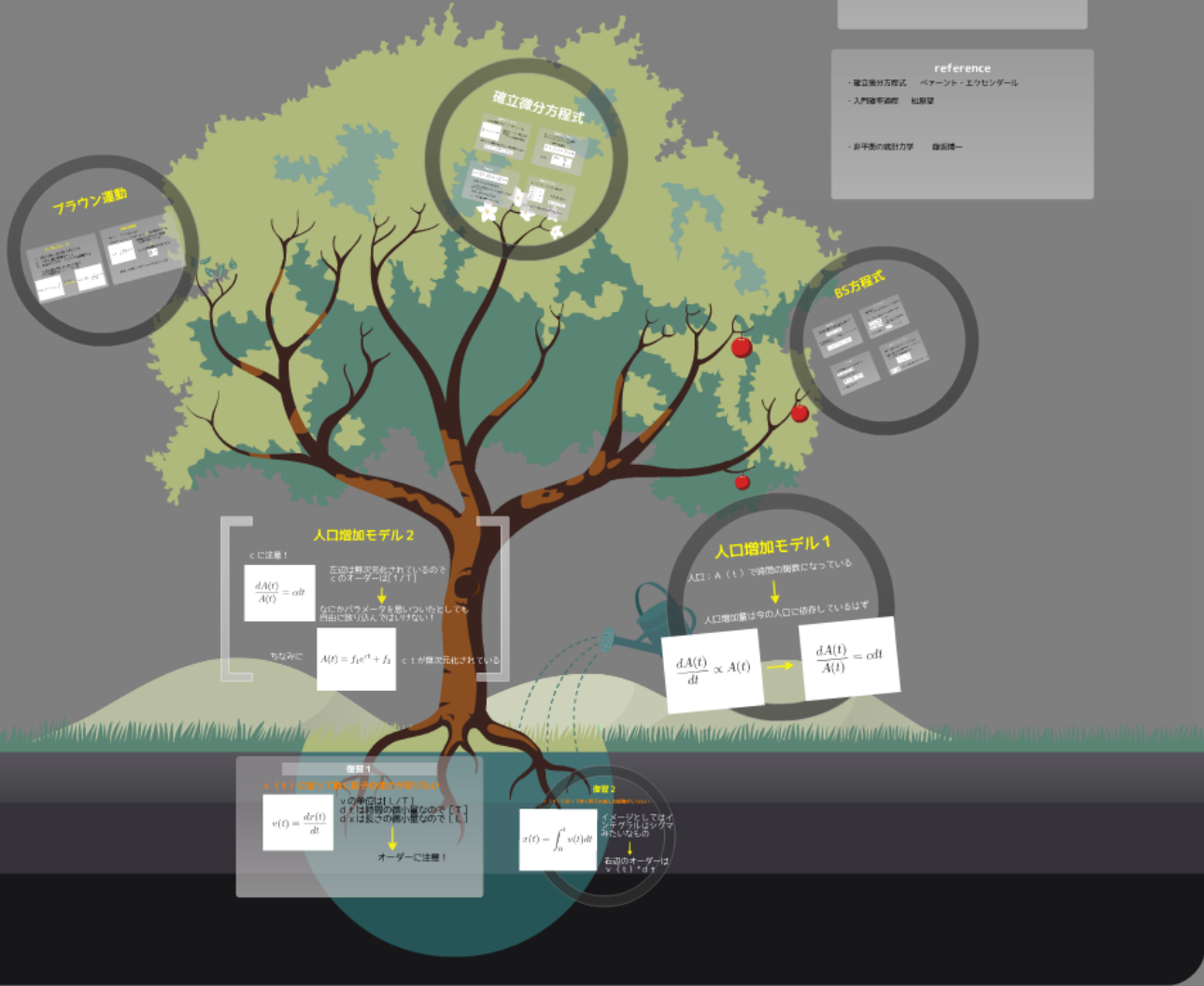
$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

このような拡散方程式を得ることができる

## reference

- ・ 確立微分方程式      ベアーント・エクセンドール
- ・ 入門確率過程      松原望
  
- ・ 非平衡の統計力学      藤坂博一

# 微分方程式をつかおう



今日の予定

- ・微分、積分の復習
- ・人口増加モデル
- ・線形微分方程式
- ・ブレイクセッションズ形式

reference

- ・確立微分方程式 ベアレント・エウセンゲール
- ・入門線形代数 松原健
- ・非平衡の統計力学 藤田博一

**ブラウン運動**

ブラウン運動の確率論的性質

独立増大性

ガウス分布

平均値

分散

**確立微分方程式**

線形微分方程式

非線形微分方程式

変数分離法

積分因子法

変数変換

**B5方程式**

線形微分方程式

非線形微分方程式

変数分離法

積分因子法

変数変換

**人口増加モデル2**

cに注意!

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = ct$$

左辺は積分可能であるのだから、cのオーダーは[1/T]

右辺がバリエーションを思いついたとしても、自由に仮定するのはいけない!

ちなみに  $A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$  cが無次元化されている

**人口増加モデル1**

人口:  $A(t)$  で時間の関数になっている

人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

**例題1**

$v(t)$  に微分して  $v(t)$  の単位は [L/T]

$v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$   $dv(t)$  は時間の微分なので [L]

$dv(t)$  は長さの微分なので [L]

オーダーに注意!

**例題2**

イメージとして、マイクログラフィングマシン

$x(t) = \int_a^t v(t) dt$

右辺のオーダーは  $[L] \cdot [T] = [L]$