

微分方程式をつかおう

今日の予定
今日は微分として集約したい

- 微分、積分の基礎
- 人口増加モデル
- 1次元線形
- 線形微分
- まとめ

ばね運動

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F \cos(\omega t)$$

数値計算

共振

人口増加モデル2

くじばあ！

左辺は導関数だから左側は1階の微分方程式
そのオーダーは $d[1]$ 階

$$\frac{dA(t)}{dt} = cA(t)$$

右辺は定数だから左側は1階の微分方程式
そのオーダーは $d[1]$ 階

ちなみに $A(t) = Ae^{ct} + C$ c, t は導関数だから左側は1階

人口増加モデル1

人口: $A(t)$ で増えるの割合になっている

人口増加量は今の人口に依存してははず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t) \implies \frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

積分

積分とは、微分とは逆の操作

$$v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

v の単位は $[L/T]$
 v は距離の速さ(速度)の単位で $[L/T]$
 v は長さの単位量なので $[L]$

オーダーに注意!

定積分

定積分とは、微分とは逆の操作

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt$$

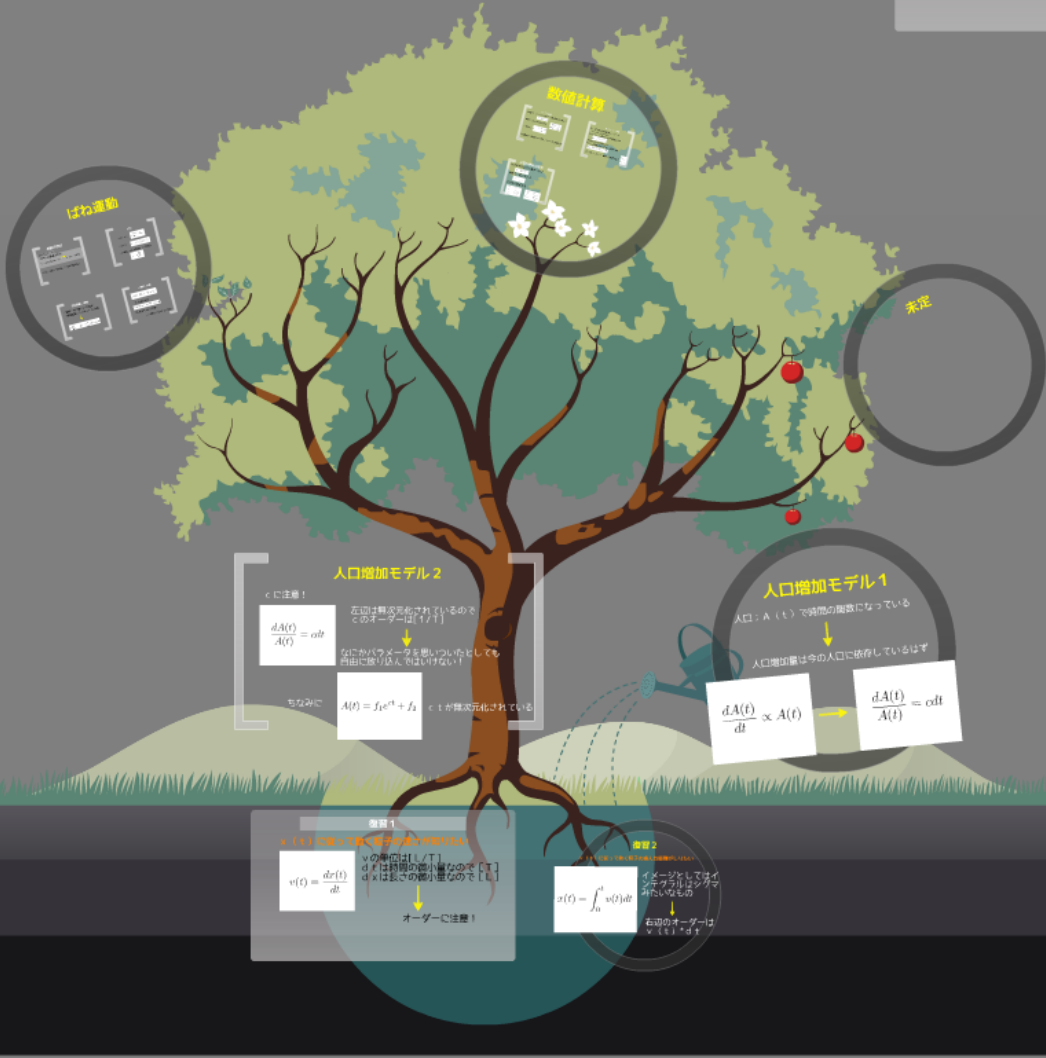
イメージとしてロケットの位置は速度の積分

オーダーに注意!

微分方程式をつかおう

今日の予定
今日は真面目に勉強しない

- ・微分、積分の復習
- ・人口増加モデル
- ・ばね運動
- ・波動方程式
- ・未定



今日の予定

今日は原則として解かない

- ・ 微分、積分の復習
- ・ 人口増加モデル
- ・ ばね運動
- ・ 数値解析
- ・ 未定

復習 1

$x(t)$ に従って動く粒子の速さが知りたい

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

v の単位は $[L/T]$

dt は時間の微小量なので $[T]$

dx は長さの微小量なので $[L]$



オーダーに注意!



オーダーに注意！

復習 2

$v(t)$ に従って動く粒子の進んだ距離がしりたい

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt$$

イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの



右辺のオーダーは $v(t) * dt$

人口増加モデル1

人口； $A(t)$ で時間の関数になっている



人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$



$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

人口増加モデル 2

c に注意！

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c dt$$

左辺は無次元化されているので
c のオーダーは [1/T]



なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけません！

ちなみに

$$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$$

c t が無次元化されている

ばね運動

運動方程式

運動の第二法則より

- ・ 力積 = 運動量の変化
- ・ $F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v) \rightarrow F = m \cdot dv/dt$

とりあえず時間変化を追えばそれが運動方程式

ばね

・ $F = -kx$ より $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

すなわち $x = A \sin(\omega t + \alpha)$

Aは振幅、 α は初相位、 ω は角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

強制振動、摩擦

- ・ 摩擦：力の項に γv を追加
- ・ 強制振動： $f \cos(\omega t)$ を追加

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + f \cos(\omega t)$$

一般解、特解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

これを満たす解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = f \cos(\omega t)$$


これを満たすのが特解

二つの解を合わせて一般解

運動方程式

運動の第二法則より

・ 力積 = 運動量の変化

・ $F \cdot \Delta t = \Delta (m \cdot v)$  $F = m \cdot dv/dt$

とりあえず時間変化を追えばそれが運動方程式

ばね

・ $F = -kx$ より

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

すなわち

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

A は振幅、 α は初期位相、 ω は角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

強制振動、摩擦

- ・ 摩擦：力の項に γv を追加
- ・ 強制振動： $f \cos(\omega t)$ を追加



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + f \cos(\omega t)$$

一般解、特解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

これを満たす解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = f \cos(\omega t)$$

これを満たす会が特解

二つの解を合わせて一般解

数値計算

テイラー展開

関数 f を $(x=a)$ の近くでべき級数に展開する

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

微分して $(x=a)$ を代入する

$$f'(a) = a_1$$
$$f''(a) = 2a_2$$

一般的に
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x-a)}{n!}$$

指数関数でも超関数でも微分さえできれば展開可能

ルンゲ・クッタ法

ある一階の微分方程式があって、 Δx を h

$$y(x+h) = y(x) + \Delta y$$

Δy をテイラー展開の二次の精度で表す

$$\Delta y = y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2$$

次に $y(x)$ からのずれをみる

ただし二階微分なので二点の情報が必要

$$\Delta y = (b_1 y'(x) + b_2 y'(x+h))h$$

これをさらにテイラー展開して係数を出す

$$b_1 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 = \frac{1}{2}$$

二階の微分方程式

まず以下のように書きなおす

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

連立の一階にかえる

$$\dot{x} = u$$
$$\dot{u} = f(u, x, t)$$

先ほどの結果から

$$\alpha_1 = hu_n \quad \beta_1 = hx_n$$
$$\alpha_2 = hu_{n+k} \quad \beta_2 = hx_{n+k}$$
$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad x_{n+1} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

テイラー展開

関数 f を ($x = a$) の近くでべき級数に展開する

$$f(x) = \sum_n a_n (x - a)^n$$

微分して($x=a$)を代入する

$$f'(a) = a_1$$
$$f''(a) = 2a_2$$

一般的に

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x - a)}{n!}$$

指数関数でも超関数でも微分さえできれば展開可能

ルンゲ・クッタ法

ある一階の微分方程式があって、 Δx を h

$$y(x+h) = y(x) + \Delta y$$

Δy をテーラー展開の二次の精度で表す

$$\Delta y = y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2}$$

次に $y(x)$ からのずれをみる

ただし二階微分なので二点の情報が必要

$$\Delta y = (b_1 y'(x) + b_2 y'(x+h))h$$

これをさらにテーラー展開して係数を出す

$$b_1 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 = \frac{1}{2}$$

二階の微分方程式

まず以下のように書きなおす

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$

連立の一階にかえる

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{u} &= f(u, x, t)\end{aligned}$$

先ほどの結果から

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= hu_n \\ \alpha_2 &= hu_{n+h} \\ u_{n+1} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= hx_n \\ \beta_2 &= hx_{n+h} \\ x_{n+1} &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\end{aligned}$$



未定

微分方程式をつかおう

今日の予定
今日は真面目に勉強しない

- ・微分、積分の復習
- ・人口増加モデル
- ・ばね運動
- ・微分方程式
- ・未定

