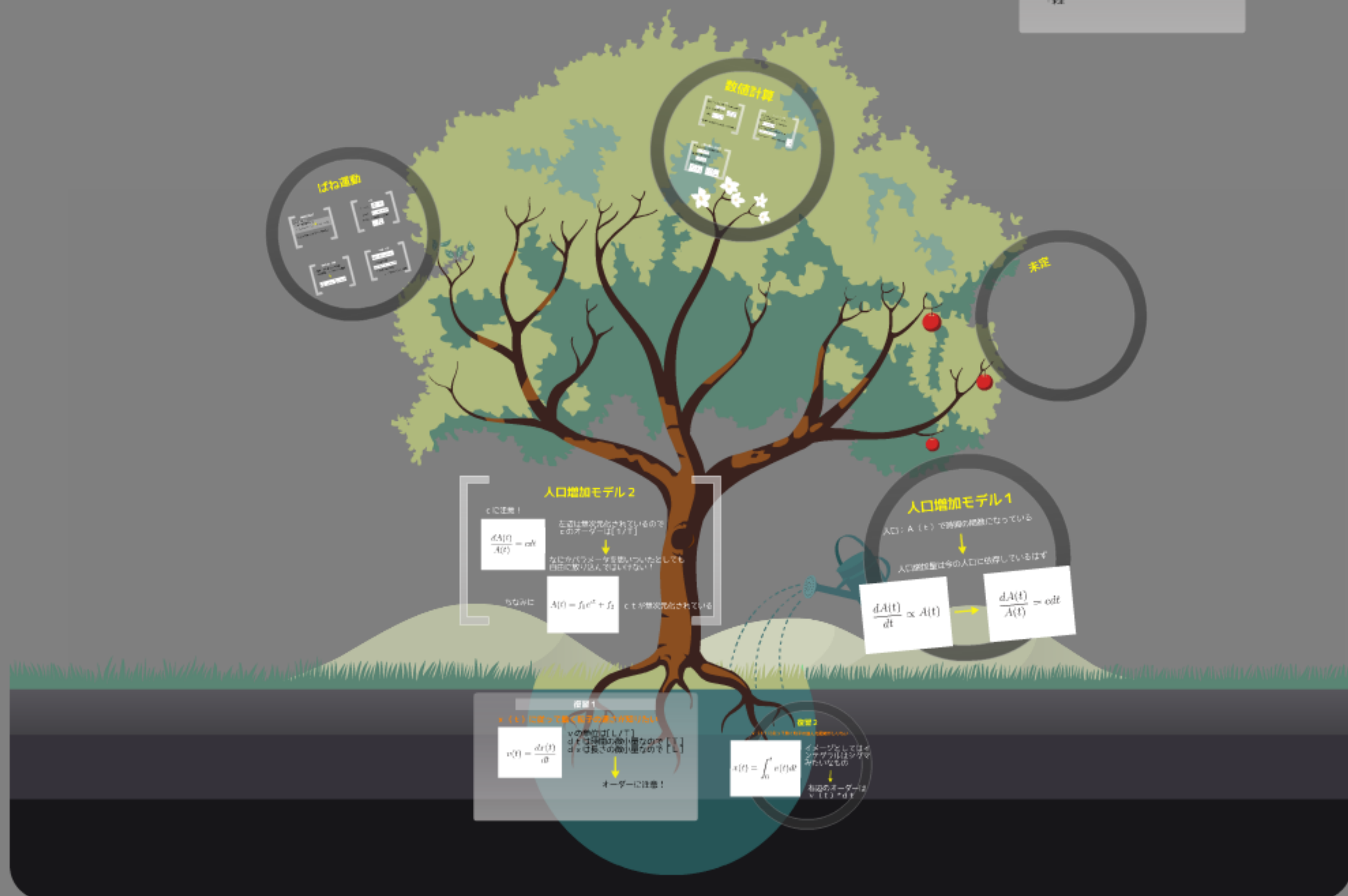
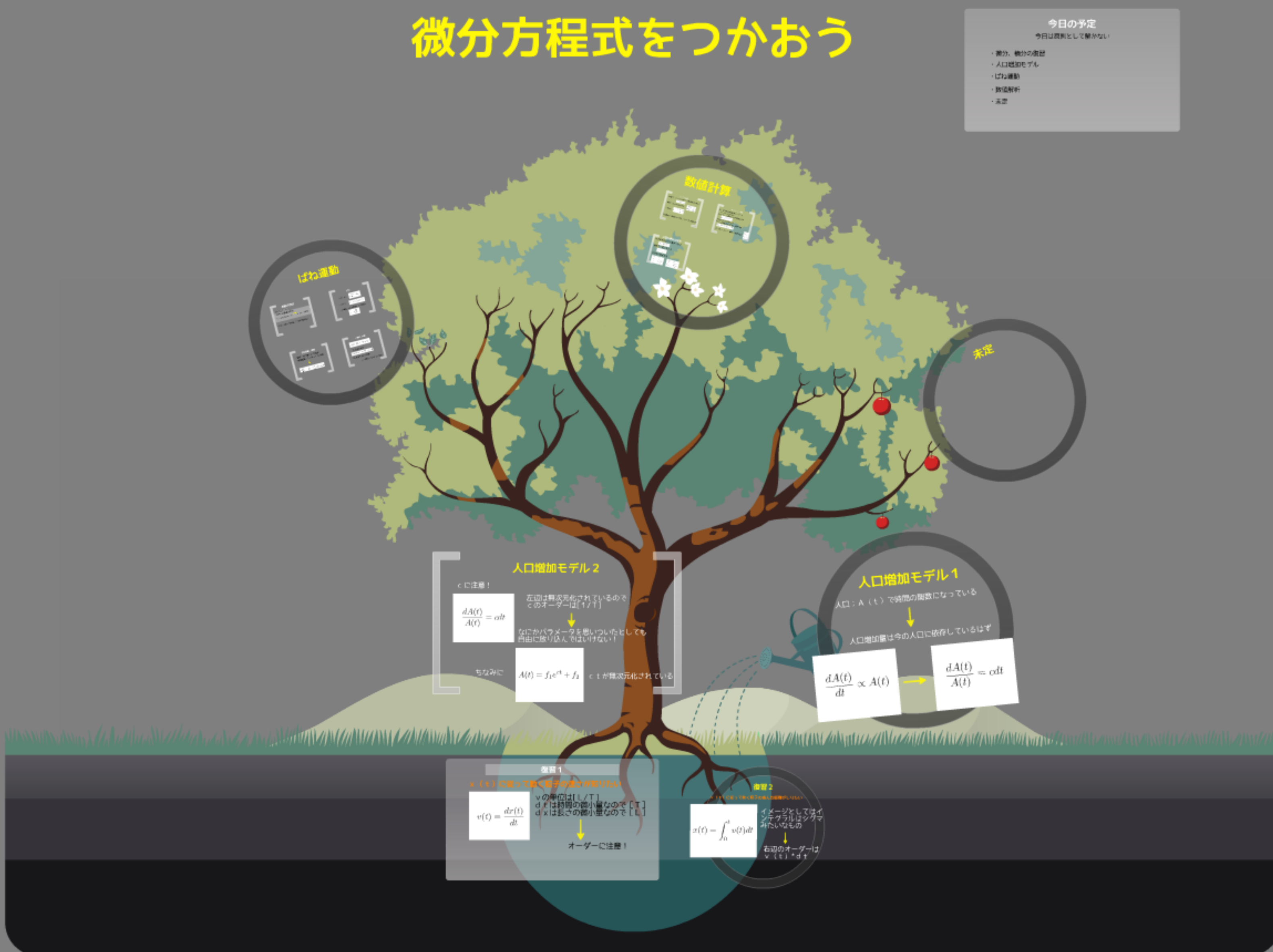
微分方程式をつかおう

今日の予定

- 微分、積分の復習
- 人口増加モデル
- ばね運動
- 数値解析
- 未定




微分方程式をつかおう
今日の予定
今日は原則として解かない
・微分、積分の復習
・人口増加モデル
・ばね運動
・数値解析
・未定
ばね運動
数値計算
未定
人口増加モデル２
ｃに注意！
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]
なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！
ちなみに
$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$
ｃｔが無次元化されている
人口増加モデル１
人口：Ａ（ｔ）で時間の関数になっている
人口増加量は今の人口に依存しているはず
$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
復習１
ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので［Ｔ］
ｄｘは長さの微小量なので［Ｌ］
オーダーに注意！
復習２
$x(t) = \int_0^t v(t)dt$
イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの
右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）＊ｄｔ

今日の予定

今日は原則として解かない

- 微分、積分の復習
- 人口増加モデル
- ばね運動
- 数値解析
- 未定

復習１

ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので［Ｔ］
ｄｘは長さの微小量なので［Ｌ］

↓

オーダーに注意！

オーダーに注意！

復習２

ｖ（ｔ）に従って動く粒子の進んだ距離がしりたい

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt$$

イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの

↓

右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）*ｄｔ

人口増加モデル１

人口；Ａ（ｔ）で時間の関数になっている

↓

人口増加量は今の人口に依存しているはず

$$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$$

→

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = c\,dt$$

人口増加モデル２

ｃに注意！

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$$

左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]

↓

なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！

ちなみに

$$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$$

ｃｔが無次元化されている

ばね運動

運動方程式

運動の第二法則より

・力積＝運動量の変化

・F・Δ t=Δ (m・ v) F=m・dv/dt

とりあえず時間変化を追えばそれが運動方程式

ばね

・F=-kx より $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

すなわち $x = A\sin(\omega t + \alpha)$

Aは振幅、α は初期位相、ω は角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

強制振動、摩擦

・摩擦：力の項にγ vを追加

・強制振動：ｆcos(ω ｔ)を追加

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + f\cos(\omega t)$$

一般解、特解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

これを満たす解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = f\cos(\omega t)$$

これを満たす会が特解

二つの解を合わせて一般解

運動方程式

運動の第二法則より

・力積＝運動量の変化

・$F \cdot \Delta t = \Delta (m \cdot v)$ $\quad$ $F = m \cdot dv/dt$

とりあえず時間変化を追えばそれが運動方程式

ばね

・F=-kx より

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

すなわち

$$x = A\sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

Aは振幅、α は初期位相、ω は角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

強制振動、摩擦

・摩擦：力の項にγ vを追加

・強制振動： f cos(ω t)を追加

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + f\cos\left(\omega t\right)$$

一般解、特解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

これを満たす解

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = f\cos(\omega t)$$

これを満たす会が特解

二つの解を合わせて一般解

数値計算

テイラー展開

関数ｆを（ｘ＝a）の近くでべき級数に展開する

$$f(x) = \sum_n a_n (x-a)^n$$

微分して(x=a)を代入する

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ f''(a) &= 2a_2 \end{aligned}$$

一般的に $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x-a)}{n!}$

指数関数でも超関数でも微分さえできれば展開可能

ルンゲ・クッタ法

ある一階の微分方程式があって、Δｘをｈ

y(ｘ＋ｈ)=y(x)+Δｙ

Δｙをテーラー展開の二次の精度で表す

$$\Delta y = y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2}$$

次にy(x)からのずれをみる
ただし二階微分なので二点の情報が必要

$$\Delta y = \{b_1 y'(x) + b_2 y'(x+h)\}h$$

これをさらにテーラー展開して係数を出す

$$b_1 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 = \frac{1}{2}$$

二階の微分方程式

まず以下のように書きなおす

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$

連立の一階にかえる

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= f(u, x, t) \end{aligned}$$

先ほどの結果から

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= h u_n \\ \alpha_2 &= h u_{n+h} \\ u_{n+1} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= h x_n \\ \beta_2 &= h x_{n+h} \\ x_{n+1} &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \end{aligned}$$

テイラー展開

関数ｆを（ｘ＝a）の近くでべき級数に展開する

$$f(x) = \sum_n a_n (x-\alpha)^n$$

微分して(x=a)を代入する

$$f'(a) = a_1$$
$$f''(a) = 2a_2$$

一般的に

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x-a)}{n!}$$

指数関数でも超関数でも微分さえできれば展開可能

ルンゲ・クッタ法

ある一階の微分方程式があって、Δ x を h

y(x + h)=y(x)+Δ y

Δ yをテーラー展開の二次の精度で表す

$$\Delta y = y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2}$$

次にy(x)からのずれをみる

ただし二階微分なので二点の情報が必要

$$\Delta y = (b_1 y'(x) + b_2 y'(x+h))h$$

これをさらにテーラー展開して係数を出す

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}$$

二階の微分方程式

まず以下のように書きなおす

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$

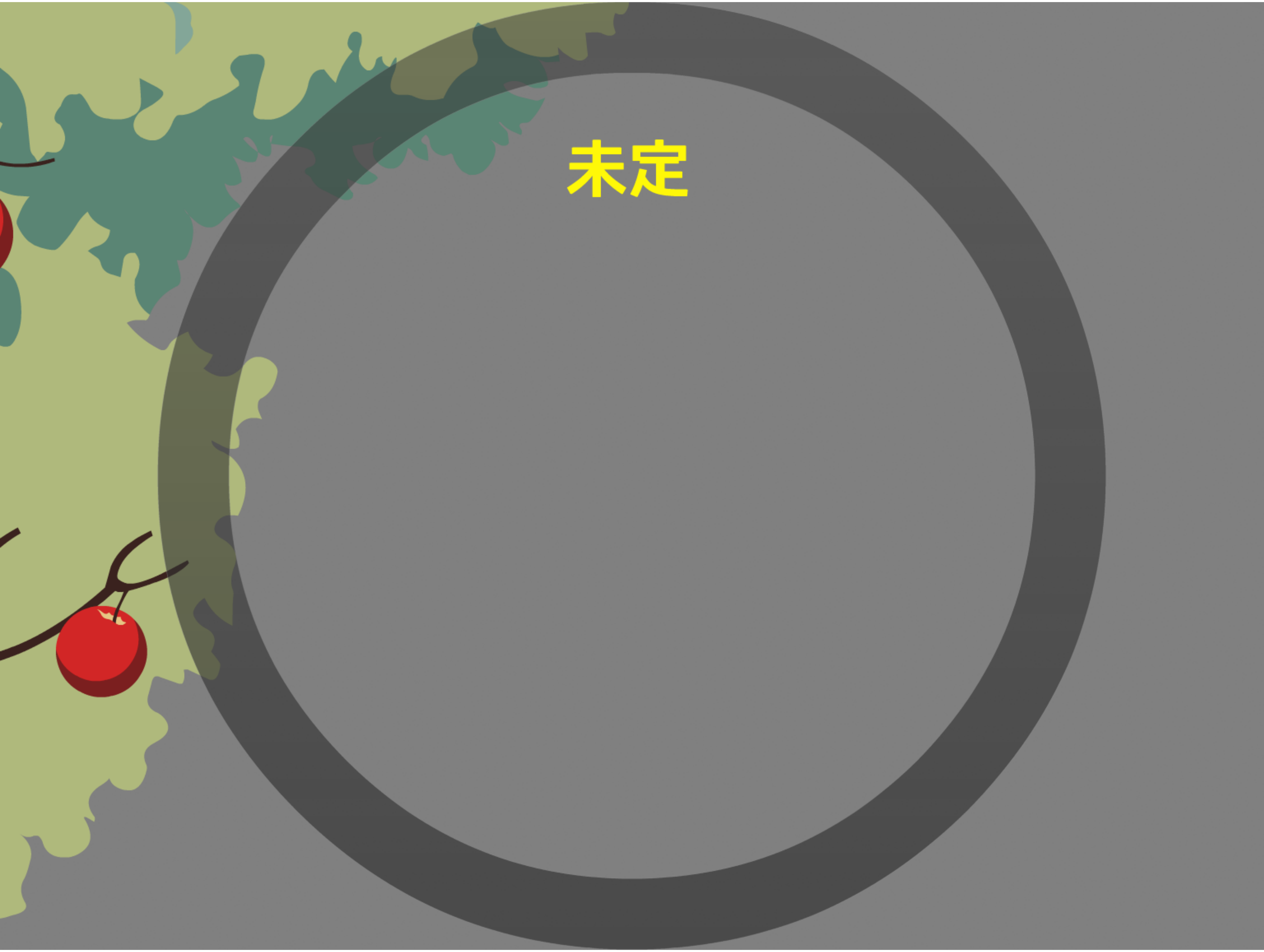
連立の一階にかえる

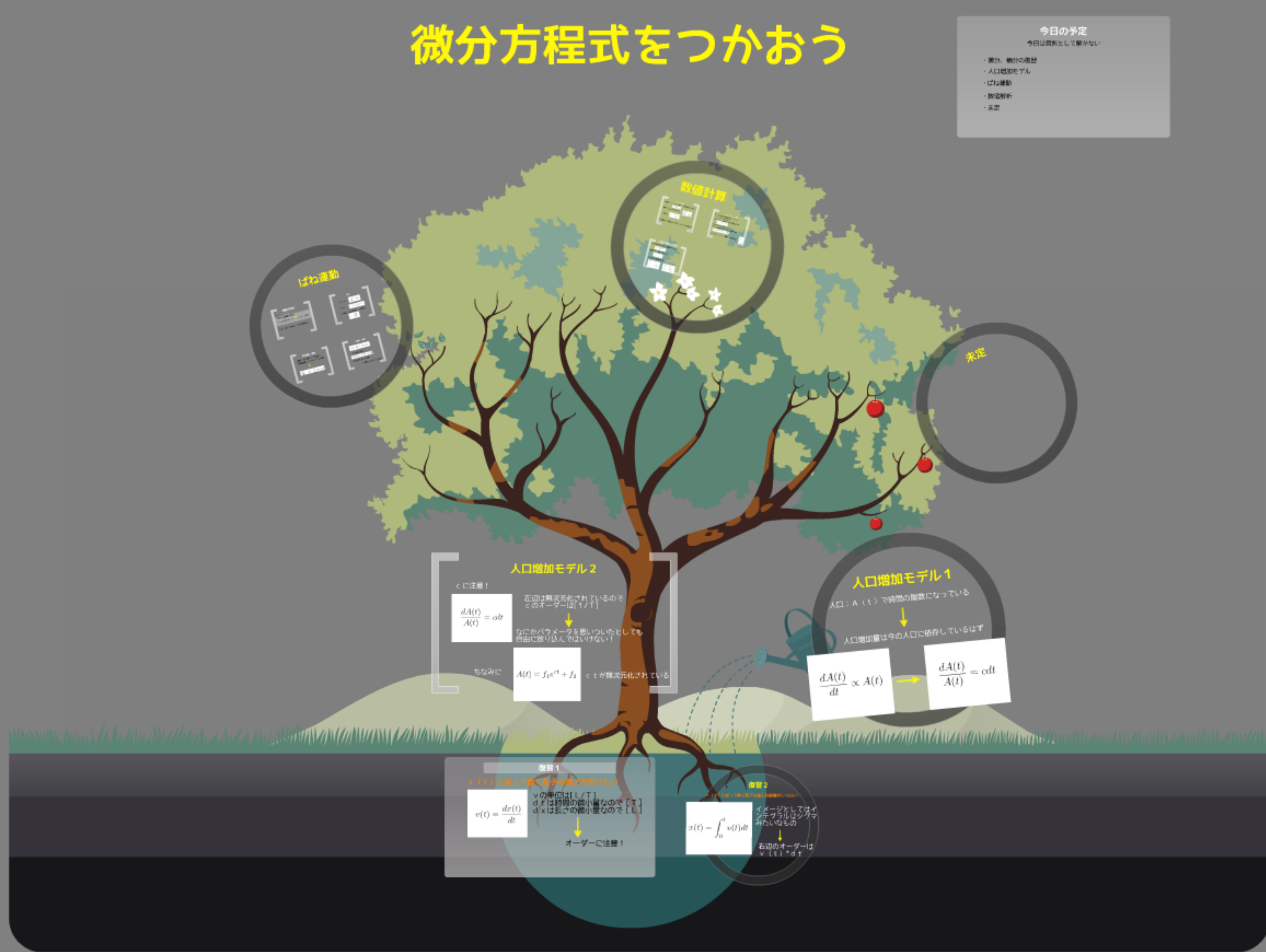
$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= f(u, x, t) \end{aligned}$$

先ほどの結果から

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= h u_n \\ \alpha_2 &= h u_{n+h} \\ u_{n+1} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= h x_n \\ \beta_2 &= h x_{n+h} \\ x_{n+1} &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \end{aligned}$$


未定


微分方程式をつかおう
今日の予定
今日は原則として解かない
・微分、積分の復習
・人口増加モデル
・ばね運動
・数値解析
・未定
ばね運動
数値計算
未定
人口増加モデル２
ｃに注意！
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
左辺は無次元化されているので
ｃのオーダーは[１/Ｔ]
なにかパラメータを思いついたとしても
自由に放り込んではいけない！
ちなみに
$A(t) = f_1 e^{ct} + f_2$
ｃｔが無次元化されている
人口増加モデル１
人口：Ａ（ｔ）で時間の関数になっている
人口増加量は今の人口に依存しているはず
$\frac{dA(t)}{dt} \propto A(t)$
$\frac{dA(t)}{A(t)} = cdt$
復習１
ｘ（ｔ）に従って動く粒子の速さが知りたい
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
ｖの単位は[Ｌ/Ｔ]
ｄｔは時間の微小量なので［Ｔ］
ｄｘは長さの微小量なので［Ｌ］
オーダーに注意！
復習２
$x(t) = \int_0^t v(t)dt$
イメージとしてはインテグラルはシグマみたいなもの
右辺のオーダーは
ｖ（ｔ）＊ｄｔ