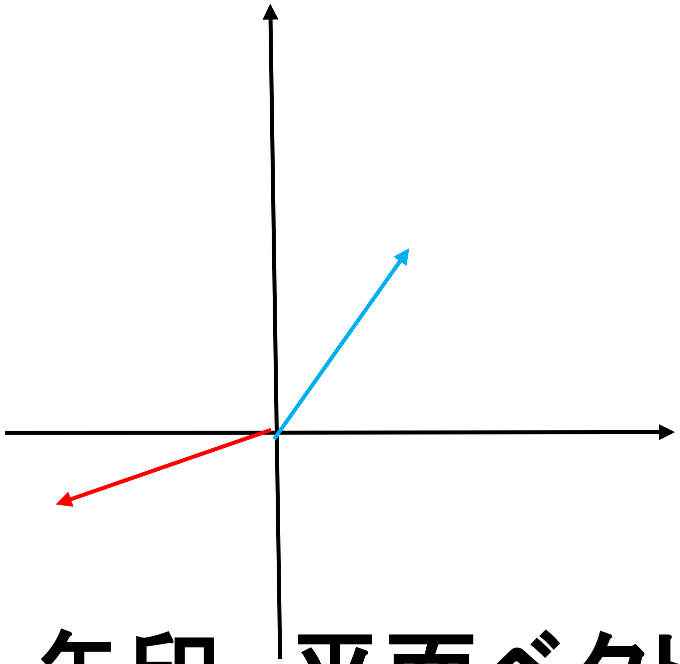
総合図書館LSセミナー　授業サポート

ベクトル空間と線形写像に慣れよう！

総合図書館LS（理学研究科・M2）

ベクトル空間

ベクトルと言われて何をイメージする？？



矢印、平面ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

位置ベクトル
数ベクトル

ベクトル空間

このようなベクトル空間もある！！

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2×2行列

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$

$$3x^4 + 3x^3 + \sqrt{5}x + 1$$

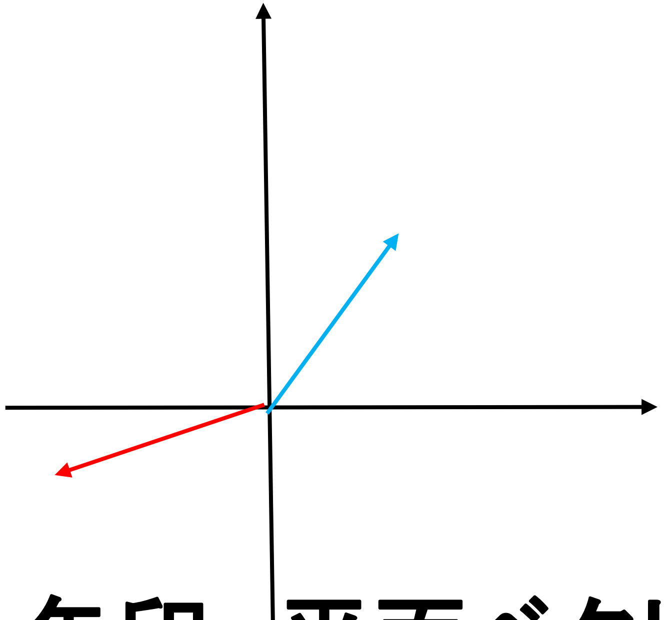
多項式

ベクトル空間

高校数学
ベクトルは矢印で足し算，スカラー倍をしていた

大学数学
ベクトル空間では足し算，スカラー倍が大切なのでは？
矢印とか図にかけていることは必ずしも重要ではない？
より，一般化されたベクトル空間を学んでいる！

ベクトル空間



矢印、平面ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2×2行列

$$3x^4 + 3x^3 + \sqrt{5}x + 1$$

多項式

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$

ベクトル空間

V,R(体)に対し2つの演算(和、スカラー倍)を定義する

和 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V)$

スカラー倍 $a\,\boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u}\in V, a\in R)$

ベクトル空間

定義

2つの演算(和、スカラー倍)が(1)〜(8)の性質を満たすとき、VはR上のベクトル空間という。

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ となるベクトル$\boldsymbol{0}$が存在する

(4) $a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$

(5) $(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$

(6) $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$

(7) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

(8) $0\boldsymbol{u}=0$

ベクトル空間

以降、Rは実数（$\mathbb{R}$） とする

例 $\mathbb{R}^5$

和

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \\ d+d' \\ e+e' \end{pmatrix}$$

スカラー倍

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \\ \alpha d \\ \alpha e \end{pmatrix}$$

ベクトル空間

例　$\mathbb{R}^5$

(3)　$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ となるベクトル$\mathbf{0}$が存在する

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

任意の自然数n に対して$\mathbb{R}^n$は$\mathbb{R}$上のベクトル空間になる

ベクトル空間

例　2×2行列

和

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

スカラー倍

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

ベクトル空間

例　2×2行列

(3) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ となるベクトル$\boldsymbol{0}$が存在する

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ベクトル空間

例　3次の多項式全体　$\mathbb{R}[x]_3$

和

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (a'_3x^3 + a'_2x^2 + a'_1x + a'_0)$$
$$= (a_3 + a'_3)x^3 + (a_2 + a'_2)x^2 + (a_1 + a'_1)x + (a_0 + a'_0)$$

スカラー倍

$$\alpha(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \alpha a_3x^3 + \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0$$

ベクトル空間

例　多項式

(3)　$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ となるベクトル$\boldsymbol{0}$が存在する

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + \boxed{0} = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

１次結合

定義

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \ldots, \boldsymbol{u}_n$:ベクトル

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{u}_n \qquad (c_i \in R)$$

と書けるとき，$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}_1 \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の**１次結合**で書けるという.

1次結合

例

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{-}9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{u}_1$ $\boldsymbol{u}_2$

一次独立　一次従属

定義

$u_1 \ldots, u_n$:ベクトル

$$\mathrm{c}_1 \boldsymbol{u}_1 + c_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

を満たすのが

$$\mathrm{c}_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

に限るとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$は**一次独立**であるという

一次独立　一次従属

定義

一次独立でないとき，

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は**一次従属**であるという

一次独立　一次従属

例

一次独立

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

一次従属

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

一次独立　一次従属

演習　以下の3つのベクトル($\mathbb{R}^3$)が一次独立か一次従属か調べよう

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一次独立　一次従属

この方程式の解を考えればよい

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

一次独立　一次従属

係数行列を考えて方程式を解けばよい

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって一次独立

ベクトル空間　基底

基底はベクトル空間を考えるとき欠かせない！

定義　生成する

Vのベクトル$u_1, u_2 \ldots u_n$がVを**生成する**とは
Vの任意のベクトルが$u_1, u_2 \ldots u_n$の一次結合で表せるときにいう

例

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ は$\mathbb{R}^4$を生成する

ベクトル空間　基底

演習

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$ は$\mathbb{R}^4$を生成するか？

ベクトル空間　基底

任意のベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対し

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

となる x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 が存在することを示せばよい

ベクトル空間　基底

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

どちらも$\mathbb{R}^4$を生成している　数が違う？　無駄がある？

ベクトル空間を考えるとき最低限で考えたい！→基底

ベクトル空間　基底

定義　基底

ベクトル空間Vのベクトルの組$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$が次の２つの条件を満たすときに$V$の**基底**という.

（１）$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$は一次独立である

（２）$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$は$V$を生成する

ベクトル空間　基底

例

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

は$\mathbb{R}^4$の基底である．$\mathbb{R}^n$でこのような形の基底は**標準基底**という

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

は$\mathbb{R}^4$の基底ではない
（一次独立でない）

ベクトル空間　基底

例

$x^3, x^2, x, 1$ は$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]_3$の基底である

$x(x-1)(x-2), x(x-1), x, 1$ も$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]_3$の基底である

基底は一組ではない！いっぱいある

ベクトル空間　基底

定理
ベクトル空間Vの基底に含まれるベクトルの個数は,
基底の取り方によらず一定である.

ベクトル空間　基底

定義

ベクトル空間Vの**次元**$\dim V$を

$$\dim V = V\text{の基底に含まれるベクトルの数}$$

と定義する

例

次元は”自由度”を表します

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$$

ベクトル空間　まとめ

・和とスカラー倍が考えられて色々うれしい性質をみたす空間がベクトル空間

・ベクトル空間ではベクトルを他のベクトルで書けるかを考える(一次独立，一次従属)

・ベクトル空間を生成する一次独立な組，基底が大切
ベクトル空間の次元が定義できる

線形写像

定義

V, U:ベクトル空間　写像$f: V \to U$が以下の条件を満たすとき

$$(1) \quad f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U)$$

$$(2) \quad f(a\boldsymbol{u})=af(\boldsymbol{u}) \qquad (\boldsymbol{u} \in U, a \in R)$$

fをVからUへの**線形写像**という

線形写像

例　線形写像になる例

$$f(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x}, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

(1) $$f(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = a(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = a\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix})$$

(2) $$f(b\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = a(b\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = b(a\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = bf(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix})$$

線形写像

線形写像でない例

$$g(a) = a^2 \, , g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + a \, , h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

確かめてみましょう

線形写像

線形写像だと基底の変化に着目すればいい！

$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u_1} + a_2\boldsymbol{u_2} + a_3\boldsymbol{u_3}$ ならば

$$f(\boldsymbol{v}) = f(a_1\boldsymbol{u_1} + a_2\boldsymbol{u_2} + a_3\boldsymbol{u_3}) = a_1 f(\boldsymbol{u_1}) + a_2 f(\boldsymbol{u_2}) + a_3 f(\boldsymbol{u_3})$$

→表現行列

線形代数を勉強しよう！

線形代数は色々な場面で活躍しています！！

・材料力学
・経済学
・量子力学
・プロジェクションマッピング
・言語学
・統計学
・数学

LSに聞いてみました！

将来研究するときに役に立つ！

・材料力学

材料に力が加わる際に内部に発生する応力や、物体の変形の度合いを示すひずみは、3次元空間の各方向の成分を有するので、行列を用いて表します。線形代数で習う計算手法が非常に重要になります。線形代数を用いることで、材料内部で起きている複雑な現象を解析することができます。

・経済学　経済モデル

データからパラメータを求めるというときにはもちろん活躍するのですが、より経済学特有のところで言うと、多くのプレイヤーが存在する(例えば、複数の企業の行動を考える)経済モデルを考える場合などには、線形代数のおかげで計算が簡潔で、モデルから得られる含意も明確になります。

・量子力学

線形代数の知識は量子論の分野で必須となっています。量子力学では、ベクトルで表される量子状態が従うシュレーディンガー方程式を解きます。シュレーディンガー方程式を解くことは、まさに固有値問題を解くことに対応しており、線形代数で学習する計算手法が必須となります。

また、線形代数ではベクトルの線形変換を学習しますが、素粒子物理学においてこの操作が重要な発見につながった例があります。理論物理学者の小林誠・益川敏英の両氏は、素粒子の一種である「クォーク」の状態を表すベクトルの線形変換によって、実験で観測されていた「CP対称性の破れ」と呼ばれる現象を説明し、ノーベル物理学賞を受賞しました。現在行われている最先端の研究においても、線形代数で学習する計算手法を駆使して、新しい物理を発見する試みがなされています。

・プロジェクションマッピング

プロジェクションマッピングでは、建物や立体物などの形に合わせて、映像がずれたり歪んだりしないように正確に重ね合わせる必要があります。そのために、プロジェクタの位置や向き、投影する対象の形状、映像の変形などを数値で表して計算する際に線形代数が使われています。

・言語学　回帰分析

言語学では、似た語や構文間の交替（例えば、英語だとJohn gave Mary a book. vs. John gave a book to Mary. のような二重目的語構文と目的語+前置詞句構文の交替や、日本語だと否定の丁寧形「ーません」と「ーないです」の交替など）の要因を推定したり・モデル化したりといったことがリサーチクエスチョンになるのですが、その際にロジスティック回帰のような回帰分析（言語学では線形回帰がメインかなと思います）や、統計モデリング（近年はベイズ統計モデリングが流行しています）を使う人もいます。

・統計学

複数のデータを扱うときにベクトル、行列は欠かせません。プログラムを組む際もよくつかいます。

・数学

解析学、代数学、幾何学などどの分野に進んでも線形代数は必要です。手足のように使います. 研究する際もたびたび線形代数の議論が出てきます。